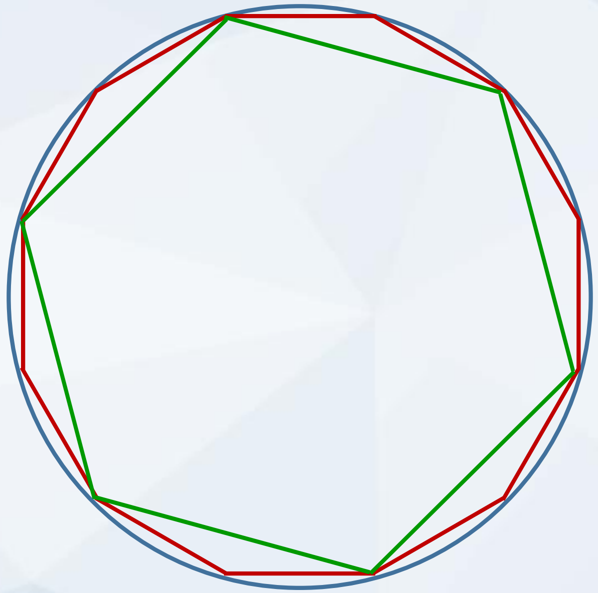
第二章 极限和连续

2.1 数列的极限

- 例 我们知道，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的图像有两条渐近线 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$.
- 所谓的渐近线，指的是曲线上一点 M 沿曲线趋近于无穷远或某个间断点时，如果 M 到一条直线的距离无限趋近于零，那么这条直线称为这条曲线的渐近线。
- 在这个定义中，为了严格地描述“趋近”的含义，我们需要引入极限的概念.
- 例 一辆汽车沿着直线行驶，它的瞬时速率 v 定义为 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$，其中 Δs 为一小段时间 Δt 内的位移，Δt 需要充分小. 严格地描述它需要引入极限的概念.

- 例 我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法.
- 计算单位圆内接正六边形的面积 $A_1 = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- 计算单位圆内接正12边形的面积 $A_2 = 6\sin\frac{\pi}{6} = 3$.
- 计算单位圆内接正24边形的面积 $A_3 = 12\sin\frac{\pi}{12} = 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.
- 计算单位圆内接正$3\cdot 2^n$边形的面积 $A_n = 3\cdot 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$.
- 如此下去, 这个面积越来越接近圆的面积 π. 其中正弦值可以通过半角公式计算得到.
- 为什么这样下去会越来越趋近于 π 呢? 这也需要用到极限的概念.



- 极限的非严格定义: 对于一个数的过程和实数 a, 如果对于任意的正数 $\varepsilon > 0$, 均存在某个过程的截断, 在这个截断之后, 这个过程和 a 相差不超过 ε.
- 我们先来看数列的极限. 所谓(无穷)数列, 就是指按一定规则排列的无穷多个实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
- 记为 $\{a_n\}$, a_n 被称为第 n 项, 用于描述所有项的式子 $a_n = f(n)$ 被称为它的通项.
- 注意和集合不同, 这里 a_i 有顺序, 而且可以有相同的.
- 数列等价于一个函数 $f: \mathbb{N}_+ = \{1,2,3, \dots\} \to \mathbb{R}$.

- 不同的数列当 $n \to \infty$ 时具有不同的表现行为.
- $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \ldots$ 递减地越来越接近 0
- $\{n\}: 1,2,3,4,5, \ldots$ 无限增大
- $\left\{3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}\right\}: \frac{3\sqrt{3}}{2}, 3, 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right), 24 \sin \frac{\pi}{24}, \ldots$ 递增地越来越接近 π
- $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}: 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$ 交错地越来越接近 1.
- $\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\}: 0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{6}{7}, \ldots$ 交错地分别越来越接近 1 和 -1.

- 定义 设有数列 $\{a_n\}$ 和常数 a. 如果

$$\forall\varepsilon>0, \exists N \text{ 使得当 } n>N \text{ 时, 有 } |a_n-a|<\varepsilon,$$

- 则称 a 为 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 或 $a_n\to a\ (n\to\infty)$.
- 如果不存在这样的常数 a, 则称该数列发散(没有极限, 不收敛).
- 我们将红字部分称为 ε-N 语言.
- ε 的任意性保证了 a_n 和 a 可以任意接近. 由于 ε 小的情形可以推出更大的 ε 成立, 因此我们实际只需要考虑很接近 0 的 ε.
- 而 $N=N_\varepsilon$ 则与 ε 相对应, 不同的 ε 可能对应不同的 N_ε. 该数值可以换成任何一个比它大的数值, 所以我们只关心它的存在性, 而不关心它具体的数值. 所以我们可以根据需要假设 $N>0$ 或者 N 是正整数.

- 例 证明当 $|q|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.
- 分析 这种问题的证明通常分为两步:
  - 估计 $|a_n-a|$, 得到它和 n 的不等式关系, 从而求得 $N=N_\varepsilon$. 这个过程中可以进行适当的放缩.
  - 将上述 N 代入极限的定义中.
- 证明 $|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon, n>\log_{|q|}\varepsilon$.
- $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\log_{|q|}\varepsilon$. 当 $n>N$ 时, 有 $|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.
- 对于其它情形, 我们只需替换红字部分.

- 例 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$
- 证明 我们有 $\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|\le\frac{1}{n}.$
- $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\frac{1}{\varepsilon}$. 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

- 所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$

- 例 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n-4}{n^2-8}=2.$
- 证明 我们有 $\left|\frac{2n^2+2n-4}{n^2-8}-2\right|=\left|\frac{2n+12}{n^2-8}\right|$. 若 $n\geq 12$, 则

$$\left|\frac{2n+12}{n^2-8}\right|\leq\frac{3n}{n^2-n}=\frac{3}{n-1}.$$

- $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\max\left\{1+\frac{3}{\varepsilon},12\right\}$. 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{2n^2+2n-4}{n^2-8}-2\right|\leq\frac{3}{n-1}<\varepsilon.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n-4}{n^2-8}=0.$

- 例 "极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 存在" 的充要条件是 "$\forall\varepsilon > 0$, (　　)".
  - (A) 必有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
  - (B) 所有项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
  - (C) 只有有限项 a_n 满足 $|a_n - a| \geq \varepsilon$
  - (D) 可能有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| \geq \varepsilon$
- 解 $\forall\varepsilon > 0$, 存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 这等价于至多只有有限项 $a_1, \dots, a_N$ 满足 $|a_n - a| \geq \varepsilon$. 故选 C, 而 BD 均不正确.
- 对于 A, 反例 $a_n = (-1)^n, a = 1$.

- 收敛数列的性质
- 定理(唯一性) 收敛数列的极限唯一.
- 证明 设 a 和 b 都是 $\{a_n\}$ 的极限. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, M > 0$ 使得当 $n > N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$; 当 $n > M$ 时 $|a_n - b| < \varepsilon$. 从而由三角不等式

$$|a - b| \le |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

- 若 $a \neq b$, 则可取 $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$. 代入得到 $2\varepsilon < 2\varepsilon$, 矛盾! 因此 $a = b$.

- 定理(有界性) 收敛数列是有界数列.
- 证明 设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a, 则对于 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon = 1$, 从而 $|a_n| < |a| + 1$.
- 因此对于 $M = \max\{a_1, \dots, a_N, |a| + 1\}$, 有 $|a_n| \leq M$. 这说明 $\{a_n\}$ 是有界数列.
- 例 对于数列 $\{a_n = (-1)^n\}$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$, 因此该数列不收敛. 但它是有界的, 这表明有界未必收敛.

- 定理(保号性) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > 0$.
- 证明 对于 $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon = \frac{a}{2}$, 从而 $a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$, 证毕.
- 注 这里 > 0 不能换成 ≥ 0, 例如 $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = 0$.
- 同理, 定理 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < 0$.
- 推论(逆否命题) 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 从某项起 ≥ 0, 则它的极限 ≥ 0.
- 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 从某项起 ≤ 0, 则它的极限 ≤ 0.
- 注 这里 $\geq$ 不能换成 $>$, 例如 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- 推论 如果收敛数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足从某项起 $a_n \geq b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

- 对于正整数集的一个无限子集合 $S \subseteq \mathbb{N}_+$, 将其中元素从小到大排成一列

$$S = \{k_1, \dots, k_n, \dots\},$$

- 则它对应了数列 $\{a_n\}$ 的一个子数列, $\{a_{k_n}\}$: $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}, \dots$
- 特别地, 当 S 为全体正奇数时, 称 $\{a_{2n-1}\}$ 为奇子数列;
- 当 S 为全体正偶数时, 称 $\{a_{2n}\}$ 为偶子数列.

- **定理** $\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.
- **证明** 必要性("$\Rightarrow$"): 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.
- 因此 $|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, |a_{2n} - a| < \varepsilon$. 从而 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.
- 充分性("$\Leftarrow$"): 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_{2n-1} - a| < \varepsilon$;

$\exists M$ 使得当 $n > M$ 时, 有 $|a_{2n} - a| < \varepsilon$.

- 所以当 $n > \max\{2N-1, 2M\}$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 故数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a.
- **定理** $\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当它的所有子数列均收敛于 a.

- 实际上，设 $S_1, \dots, S_m \subseteq \mathbb{N}_+$ 是有限多个无限集合，且对充分大的正整数 n 总落在其中一个集合内. 那么 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \Leftrightarrow \left\{a_{k_{1,n}}\right\}_n, \dots, \left\{a_{k_{m,n}}\right\}_n$ 均收敛于 a，其中 $S_i = \{k_{i,1}, \dots, k_{i,n}, \dots\}$.
- 这是因为 $\forall \varepsilon > 0$，每个 S_i 除去有限多项后满足 $\left|a_{k_{i,n}} - a\right| < \varepsilon$. 从而一共也只除去了有限多项. 然而对于无穷多个 S_i，这是不对的.
- 我们将第一象限内的整点按如下规律排列成一排

$$(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), \dots$$

- 设第 n 个数为 (x_n, y_n). 令 $a_n = \frac{y_n}{x_n}$.
- 对于每一个正整数 y，集合 $S_y = \{n: y_n = y\}$ 对应的子数列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ 收敛于 0.
- 由于集合 $S = \{n: x_n = y_n\}$ 对应的子数列 $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \dots$ 收敛于 1，因此 $\{a_n\}$ 不收敛.

2.2 函数的极限

- 我们参照数列极限的定义来定义函数的极限. 我们先考虑当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 的极限. 回忆数列的极限

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ 使得当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - a| < \varepsilon.$$

- 定义 设函数 $f(x)$ 当 x 充分大时有定义, A 为常数. 如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \text{ 使得当 } x > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon,$$

- 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A \ (x \to +\infty)$.
- 从几何角度来看, 就是函数在 $(X, +\infty)$ 上的限制的图像被夹在直线 $y = A \pm \varepsilon$ 之间.
- 我们将红字部分称为 ε-X 语言.

- 类似地，我们有:
- 定义 设函数 $f(x)$ 当 x 充分小时有定义，A 为常数. 如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \text{ 使得当 } x < -X \text{ 时，有 } |f(x) - A| < \varepsilon,$$

- 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A \ (x \to -\infty)$.
- 定义 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时有定义，A 为常数. 如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \text{ 使得当 } |x| > X \text{ 时，有 } |f(x) - A| < \varepsilon,$$

- 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A \ (x \to \infty)$.
- 注意，函数极限中需要分清 $x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$，而数列情形只有 $n \to \infty$，因为 n 是正整数.

- 类似于数列极限的性质，我们有
- 定理 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A.$
- 当 $y\to\infty$ 时，$x=x_0+\frac{1}{y}\to x_0$. 因此如果存在 $\delta>0$ 使得函数 $f(x)$ 在 x_0 的去心 δ 邻域

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

- 上有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 应当定义为 $\lim\limits_{y\to\infty} f\left(x_0+\frac{1}{y}\right)$. 于是我们得到下述定义：
- 定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，A 为常数. 如果

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \text{ 使得当 } x\in\mathring{U}(x_0,\delta) \text{ 时，有 } |f(x)-A|<\varepsilon,$$

- 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$.

- 从几何角度来看，就是函数在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 上的限制的图像被夹在直线 $y=A\pm\varepsilon$ 之间.
- 类似地可以定义单侧极限
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 使得当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 使得当 $x\in(x_0-\delta,0)$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.
- 我们将红字部分称为 ε-δ 语言.
- 定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.
- 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$，我们记 $f(x_0^+)=A$. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，我们记 $f(x_0^-)=A$.

- 例 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$
- 分析 和数列极限类似，这种问题的证明通常也分为两部分
  - 先估计 $|f(x)-A|$，得到它和 $|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>X$ 的不等式关系，从而求得 δ 或 X. 这个过程中可以进行适当的放缩.
  - 将 δ 或 X 代入极限的定义中.
- $\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon, |x|>\frac{1}{\varepsilon}$，因此我们可以取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$.
- 证明 $\forall\varepsilon>0$，令 $X=\frac{1}{\varepsilon}$. 当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

- **例** 证明 $a > 1$ 时, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.
- **分析** 由于 $a > 1$ 时, $\log_a x$ 是单调递增的. 因此 $|a^x - 0| = a^x < \varepsilon, x < \log_a \varepsilon$.
- **证明** $\forall \varepsilon > 0$, 令 $X = -\log_a \varepsilon$. 当 $x < -X$ 时, 有 $|a^x - 0| = a^x < \varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.
- **例** 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b$.
- **分析** $|(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a| \cdot |x - x_0| < \varepsilon$, 因此我们可以取 $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$. 注意我们需要单独考虑 $a = 0$ 的情形.

- **证明** 我们有 $|(ax+b)-(ax_0+b)| = |a|\cdot|x-x_0|$.
- 如果 $a=0$, $\forall\varepsilon>0$, 令 $\delta=1$. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|(ax+b)-(ax_0+b)| = |a|\cdot|x-x_0| = 0 < \varepsilon.$$

- 如果 $a\neq 0$, $\forall\varepsilon>0$, 令 $\delta=\frac{\varepsilon}{a}$. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|(ax+b)-(ax_0+b)| = |a|\cdot|x-x_0| < |a|\delta = \varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b) = ax_0+b$.
- **注记** 当 $f(x)=A$ 时, 我们可以取任一正数作为 δ, 只要 $\mathring{U}(x,\delta)$ 包含在该函数的定义域范围内即可.

- 例 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.
- 与三角函数有关的放缩往往要用到和差化积公式

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

- 然后将不含 $x-x_0$ 的项放缩到 1；以及三角函数基本不等式

$$|\sin x|\le|x|,\forall x\in(-\infty,+\infty),\qquad |x|\le|\tan x|,\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

- 证明 我们有 $|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|$.
- $\forall\varepsilon>0$, 令 $\delta=\varepsilon$. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\sin x-\sin x_0|\le|x-x_0|<\delta=\varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

- 例 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.
- 分析 从图像上可以看出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$. 我们想要使用 $|x|$ 来控制 $\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|$. 不过这个形式不容易估计, 我们令 $t=\arctan x$, 则问题变成了 $\left|t-\frac{\pi}{2}\right|$ 和 $|\tan t|$ 的关系. 再令 $s=\arctan x-\frac{\pi}{2}$, 则 $|s|\leq|\tan s|$.
- 不过这个不等式并不总是对的, 我们需要估计 $s=\arctan x-\frac{\pi}{2}$ 的范围. 由于我们考虑的是 $x\to+\infty$, 不妨设 $x>0$, 那么 $\arctan x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $s=\arctan x-\frac{\pi}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

- 证明 我们来证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$. 当 $x>0$ 时,$\arctan x-\frac{\pi}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

  因此 $\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|\le\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\right|=\left|\frac{1}{\tan(\arctan x)}\right|=\frac{1}{x}$.

- $\forall\varepsilon>0$, 令 $X=\frac{1}{\varepsilon}>0$. 当 $x>X$ 时, 有

$$\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|\le\frac{1}{x}<\frac{1}{X}=\varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.
- 同理, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$. 因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

- 例 证明 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$
- 分析 这种极限是 $\frac{f}{g}$ 型, 其中 $f\to 0, g\to 0$. 我们称之为 $\frac{0}{0}$ 型不定式. 它的极限可能存在, 可能不存在. 这种一般要去掉公因式, 将其变为定式.
- 证明 $\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x+2-4|=|x-2|.$
- $\forall\varepsilon>0$, 令 $\delta=\varepsilon$.当 $0<|x-2|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x-2|<\varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$

- 例 如果函数 $f(x)=\begin{cases} a\sin x, & x<\frac{\pi}{2} \\ x+b, & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$ 满足 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1$，求 a,b.
- 分析 这种是典型的由分段函数性质求待定参数的问题，我们后续会经常遇到. 由于一点处极限等价于两侧极限都存在且为 1，因此我们会得到两个等式，从而可以解出两个未知参数.
- 由于 $f(x)$ 的两个分段都是我们已经求过极限的函数，因此我们可以直接用前面已经证明的结论.
- 解 由于 $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=\frac{\pi}{2}+b$，$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)_-} f(x)=a$，因此 $a=1, b=1-\frac{\pi}{2}$.

- 例 对于哪些 x_0，$\lim\limits_{x\to x_0}[x]$ 存在.
- 分析 与 $[x]$ 有关的问题往往需要用到两个不等式，

$$[x]\le x<[x]+1 \text{ 或 } x-1<[x]\le x.$$

- 我们回忆 $[x]$ 的图像. 从图像上可以看出 $x_0\in\mathbb{Z}$ 时左右极限不相等，从而该点极限不存在. 解答时，我们取一个很小的邻域，使得在这个邻域的左右各自半边内，该函数是常值函数，从而得到单侧极限.
- 当 $x_0\notin\mathbb{Z}$ 时，我们同样希望取一个小邻域使得 $[x]$ 是常值函数. 这需要 δ 不超过 x_0 和两边的最近的整数的距离. 所以

$$\delta=\min\{x-[x_0],[x_0]+1-x\}.$$

- 解 如果 $x_0 \in \mathbb{Z}$, 则
  - 当 $x \in \left(x_0, x_0 + \frac{1}{2}\right)$ 时, $[x] = x_0$, 所以 $\lim\limits_{x \to x_0^+}[x] = x_0$;
  - 当 $x \in \left(x_0 - \frac{1}{2}, x_0\right)$ 时, $[x] = x_0 - 1$, 所以 $\lim\limits_{x \to x_0^-}[x] = x_0 - 1$.
- 因此 $\lim\limits_{x \to x_0}[x]$ 不存在.
- 如果 $x_0 \notin \mathbb{Z}$, 令 $\delta = \min\{x_0 - [x_0], [x_0] + 1 - x_0\} > 0$. 于是

$$[x_0] \le x_0 - \delta < x_0 + \delta \le [x_0] + 1.$$

- 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, 从而 $[x_0] < x < [x_0] + 1$, $[x] = [x_0]$. 因此 $\lim\limits_{x \to x_0}[x] = [x_0]$.
- 故当且仅当 $x_0 \notin \mathbb{Z}$ 时, $\lim\limits_{x \to x_0}[x]$ 存在.

- 现在我们可以严格定义渐近线了. 我们知道 $ax+by+c=0$ 当 a,b 不全为零时表示一条直线, 无论是 $y=kx+b$ 还是 $x=a$ 都可以统一为这种形式.
- 点 $P=(x,y)$ 到这条直线的距离是 $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 点 P 趋向于无穷远可以表达为 $x^2+y^2\to+\infty$.
- 定义 对于曲线 C, 如果 $\lim(ax+by+c)=0$, 其中 $x^2+y^2\to\infty$, $(x,y)\in C$, 则称直线 $ax+by+c=0$ 是曲线 C 的一条渐近线.
- 用 ε-X 语言表达就是:

  $\forall\varepsilon>0, \exists X$ 使得当 $x^2+y^2>X, (x,y)\in C$ 时, 有 $|ax+by+c|<\varepsilon$.

- 渐近线可分为: 水平渐近线、竖直渐近线和斜渐近线三种，相应的判定方法等价于
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$, 直线 $y=kx+b$;
  - $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{f(x)}=0$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{f(x)}=0$, 直线 $x=a$.
- 注意两个单侧极限有一个存在即可.
- 函数的渐近线指的就是它的图像的渐近线.
- 例 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+x$, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=0$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{f(x)}=0$, 因此 $y=x,x=1$ 是它的全部渐近线.

2.3 极限的性质

- 与数列极限类似, 对于函数的六种极限我们均有:
- 定理(唯一性) 如果 $\lim f(x)$ 存在, 则必唯一.
- 定理(局部有界性) 如果 $\lim f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 局部有界.
- 所谓的局部, 是指极限定义中 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立的某个区间范围. 以 $x \to +\infty$ 为例, 局部有界是指存在 X 使得 $f|_{(X,+\infty)}$ 有界.
- 定理(局部保号性) 如果 $\lim f(x) = a > 0$, 则 $f(x)$ 局部大于 0.
- 推论 如果 $\lim f(x)$ 存在且局部非负, 则极限非负.
- 推论 如果 $\lim f(x), \lim g(x)$ 存在且局部 $f(x) \geq g(x)$, 则 $\lim f(x) \geq \lim g(x)$.

- 极限的四则运算性质
- 定理 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$.
  - (1) $\lim(f \pm g)(x) = A \pm B$.
  - (2) $\lim(fg)(x) = AB$.
  - (3) 当 $B \neq 0$ 时, $\lim\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$.
- 证明 我们只证明 $x \to x_0$ 的情形, 其它情形类似.
- (1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$;
  - $\exists \delta_2 > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.
- 因此, 当 $0 < |x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时, 有

  $$|(f \pm g)(x) - (A \pm B)| = |(f(x) - A) \pm (g(x) - B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon.$$
- 所以 $\lim\limits_{x \to x_0}(f \pm g)(x) = A \pm B$.

- (2) 分析 $$|f(x)g(x)-AB| = |f(x)(g(x)-B)+B(f(x)-A)| \\ \leq |f(x)|\cdot|g(x)-B|+|B|\cdot|f(x)-A|.$$
- 由局部有界性, $\exists\delta_1, M>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, 有 $|f(x)|\leq M$.
- $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_2>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时, 有 $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$;
- $\exists\delta_3>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_3$ 时, 有 $|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2M}$.
- 因此, 当 $0<|x-x_0|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ 时, 有

$$|f(x)g(x)-AB|\leq M\cdot|g(x)-B|+|B|\cdot|f(x)-A|$$

$$\leq M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+|B|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}<\varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=AB$.

- (3) 我们只需要证明 $\frac{1}{g} \to \frac{1}{B}$ 然后利用(2). 这需要对 $\frac{1}{g}$ 在 x_0 附近进行估计使得其有个非零下界.
- 对于 $\varepsilon = \frac{|B|}{2} > 0, \exists \delta_1 > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|g(x) - B| \leq \varepsilon = \frac{|B|}{2}$. 于是

$$|g(x)| \geq |B| - |g(x) - B| \geq \frac{|B|}{2},$$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(x) - B|}{|B| \cdot |g(x)|} \leq \frac{2}{|B|^2} |g(x) - B|.$$

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon$.
- 因此当 $0 < |x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(x) - B|}{|B| \cdot |g(x)|} \leq \frac{2}{|B|^2}|g(x) - B| < \varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$. 由(2)可知 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{A}{B}$.
- **推论** 设 $\lim f(x) = A$, 则
  - (1) $\lim[Cf(x)] = CA$.
  - (2) $\lim[f(x)]^k = A^k, k \in \mathbb{N}_+$.

- 数列与函数的关系
- 设 $\{a_n\}$ 是一个数列. 定义 $f(x)=a_{[x]}$, 它是 $[1,+\infty)$ 上的一个分段函数.
- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则 $\forall\varepsilon>0, \exists N$ 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 因此当 $x>N+1$ 时, $[x]>N, |f(x)-a|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$.
- 反过来也成立, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 从而与函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}$ 相关的概念和性质可以移植到数列上.
- 定理 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$, 则
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b,\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{a}{b}\ (b\neq 0)$,
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(Ca_n)=Ca,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n^k=a^k, k\in\mathbb{N}_+$.

- 例 对于多项式 $P(x)$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.
- 例 对于多项式 $P(x), Q(x)$, 如果 $Q(x_0) \neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.
- 例 求 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$.
- 分析 该极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式.
- 解 由于 $x \to 1$ 时, $x - 1 \neq 0$, 因此 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{2}{3}$.
- 可以看出, 利用极限的四则运算性质, 我们可以得到很多的极限. 下面我们介绍极限的函数复合运算性质. 我们在未来会看到, 在研究函数连续性和可导性时, 也会通过研究简单函数、四则运算性质和函数复合运算性质来研究复杂函数的相应性质.

极限的复合运算性质

- **定理** 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$. 若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内不等于 a, 则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

- **证明** 由 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$ 知 $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$ 使得当 $0<|u-a|<\eta$ 时, 有 $|f(u)-A|<\varepsilon$.
- 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ 知 $\exists\delta_1>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, 有 $|\varphi(x)-a|<\eta$.
- 设 $u=\varphi(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 上不等于 a, 则当 $0<|x-x_0|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 时, 有

$$0<|\varphi(x)-a|<\eta,\qquad |f[\varphi(x)]-A|<\varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$.
- **注记** 如果 $f(a)=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$, 则可以不要求 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内不等于 a.

- 例 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.
- 证明 上一节中我们已经证明了 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.
- 设 $u=\varphi(x)=\frac{\pi}{2}-x$, 则 $\sin u=\cos x$. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=\frac{\pi}{2}-x_0$, 因此

$$\lim_{x\to x_0}\cos x=\lim_{x\to x_0}\sin\varphi(x)=\lim_{u\to\frac{\pi}{2}-x_0}\sin u=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)=\cos x_0 .$$

- 例 证明 $x_0\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}\tan x=\tan x_0$.
- 证明 由于 $\cos x_0\neq 0$, 因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\tan x=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x_0}{\cos x_0}=\tan x_0$.

- 例 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$.
- 该极限是 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 分子分母代入均为 0. 利用 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 可将极限为 0 的根式化为有理形式, 这种技巧我们会常常使用.
- 解 我们先证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}\ (x_0>0)$. 注意到 $\sqrt{x}-\sqrt{x_0}=\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$.
- $\forall\varepsilon>0$, 令 $\delta=\min\left\{\frac{x_0}{2},\sqrt{x_0}\varepsilon\right\}$. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$\sqrt{x}+\sqrt{x_0}>\sqrt{x_0},\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}<\frac{\sqrt{x_0}\varepsilon}{\sqrt{x_0}}=\varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

- 现在

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x-1)(x+2)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(-2)}{(x+2)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{-2}{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

- 其中最后一步使用了极限的复合函数运算以及 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

2.4 无穷小和无穷大

- 我们知道 $\lim f(x) = A$ 等价于 $\lim[f(x) - A] = 0$. 这反映了研究极限可以转化到研究极限为 0 的函数上来.
- 定义 如果 $\lim f(x) = 0$, 就称 $f(x)$ 为该极限过程时的无穷小.
- 下面是一些无穷小的例子:

$$x - 1 \quad (x \to 1), \qquad \sqrt{x} \quad (x \to 0^+), \qquad \frac{1}{x} \quad (x \to \infty), \qquad \frac{\sin n}{n} \quad (n \to \infty).$$

- 无穷小是一个函数或者数列, 它不是一个具体的数, 所以我们谈论无穷小时需要带上极限过程.

- 定理 在自变量的同一变化过程中，有限个无穷小的代数和或乘积仍然是无穷小.
- 这由无穷小的定义和极限四则运算法则得到.
- 注意 无穷多个无穷小的和未必还是无穷小. 例如 $n \to \infty$ 时,
- $a_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 0 \le m \le n; \\ 0, & m > n \end{cases}$ 是无穷小，但 $b_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = 1$ 不是无穷小.
- 注意 无穷多个无穷小的乘积未必还是无穷小. 例如 $n \to \infty$ 时,
- $a_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \le m \le n; \\ n, & n < m \le 2n; \\ 1, & m > 2n \end{cases}$ 是无穷小，但 $b_n = \prod\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = 1$ 不是无穷小.

- 定理 有界函数和无穷小的乘积仍然是无穷小.
- 证明 我们只证明 $x \to x_0$ 的情形, 其它情形类似.
- 设 $f(x)$ 有界, $g(x)$ 是无穷小, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. 设 $|f(x)| < M$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. 于是

$$|f(x)g(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$, 即 $f(x)g(x)$ 是无穷小.
- 推论 常数和无穷小的乘积仍然是无穷小.

- 定义 在某个极限过程中，如果 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小，则称 $f(x)$ 为无穷大.
- 以 $x \to x_0$ 为例，我们可以将其表述为

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ 使得当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时，有 } |f(x)| > M.$$

- 记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. 注意此时 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 实际上是不存在的.
- 如果将 $|f(x)| > M$ 换为 $f(x) > M$ (或 $f(x) < -M$)，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的正无穷大(或负无穷大)，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ 或 $-\infty$. 这等价于 $\frac{1}{f(x)}$ 是局部大于零(或小于零)的无穷小.
- 对于其它五种极限过程可以类似地定义. 和无穷小类似，无穷大是一个函数或者数列，它不是一个具体的数，所以我们谈论无穷大时需要带上极限过程.
- 函数无穷大意味着函数无界，但反之未必. 例如 $x \to \infty$ 时 $f(x) = x\cos x$ 无界但并不是无穷大.

- 例 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x^3-1}\right)$.
- 解 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1-(x+2)}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2}{3}$.
- 可以看出 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^3-1}=\infty$. 这种极限被称为 $\infty\pm\infty$ 型不定式, 通常我们需要将其化成 $\frac{0}{0}$ 型来处理.

- 例 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{1}=2,$
- 或者 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{2}{t^2}-\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2-t}{1-t^2}=\dfrac{2}{1}=2.$
- 这种极限被称为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式. 我们可以根据需要将 $x\to\infty$ 化为 $t=\frac{1}{x}\to0.$
- 例 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0}{1-0}=0.$

- 一般地，设 $a_0 b_0 \neq 0$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

- 例 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，则（　　）.
  - (A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\infty$
  - (C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty$　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$
- 解 取 $g(x)=\pm f(x)$ 可知 (A)(B)错误. 取 $g(x)=2f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{2}$，因此选 (C).

- 我们来讨论下两个函数相加时的极限与各自极限的关系. 如果 f 极限存在, g 极限不存在, 则由 $g=(f+g)-f$ 可知 $f+g$ 极限也不存在.

$\lim f$	$\lim g$	$\lim\,(f+g)$
A (存在)	B (存在)	$A+B$ (存在)
A (存在)	不存在	不存在
局部有界或 $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
局部有界或 $-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
不存在	不存在	都有可能
$+\infty$	$-\infty$	都有可能($\infty\pm\infty$ 型不定式)

- 两个函数相乘时的极限与各自极限的关系如下:

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(fg)$
A (存在)	B (存在)	AB (存在)
$A\neq 0$ (存在)	不存在或 ∞	不存在或 ∞
0 (存在)	不存在或 ∞	都有可能($0\cdot\infty$ 型不定式)
不存在	不存在	都有可能
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- 两个函数相除时的极限与各自极限的关系如下:

$\lim f$	$\lim g$	$\lim\left(\frac{f}{g}\right)$
A (存在)	$B \neq 0$ (存在)	$\frac{A}{B}$ (存在)
$A \neq 0$ (存在)	0 (存在)	∞
0 (存在)	0 (存在)	都有可能($\frac{0}{0}$ 型不定式)
不存在	不存在	都有可能
∞	∞	都有可能($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式)

- 无穷小的比较
- 我们知道两个无穷小的加减乘均是无穷小，但两个无穷小的商却未必.
- 例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$.
- 这种 $\frac{0}{0}$ 型不定式之所以这些情形结果不同，是因为分子分母趋于零的速度不同. 例如 x^2 比 x 趋于零的速度要快，因此二者相除仍然是无穷小.

- 定义 设在自变量的同一变化过程中, $\alpha=\alpha(x)$ 和 $\beta=\beta(x)$ $(\beta\neq 0)$ 是两个无穷小.
- (1) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, 则称 α 是 β 的高阶无穷小, 记作 $\alpha=o(\beta)$, 也称 β 是 α 的低阶无穷小.
- (2) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$, 则称 α 与 β 是同阶无穷小. 特别地, 如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, 则称 α 与 β 是等价无穷小, 记作 $\alpha\sim\beta$.
- 例 $x\to 0$ 时, x^2 是 x 的高阶无穷小, 即 $x^2=o(x)$.
- 例 $x\to 1$ 时, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\neq 0$, 因此 $x-1$ 是 x^3-1 的同阶无穷小, 且 $x^3-1\sim 3(x-1)$.

- 例 设在自变量的同一变化过程, α 是 β 的高阶无穷小 $(\alpha, \beta \neq 0)$, 则下列结论不正确的是(　　).
  - (A) $\alpha\beta$ 是 β 的高阶无穷小　　(B) $\frac{\alpha}{\beta}$ 是 β 的低阶无穷小
  - (C) $\alpha - \beta$ 是 β 的同阶无穷小　(D) $\alpha + \beta$ 是 β 的等价无穷小
- 解 $\frac{\alpha\beta}{\beta} = \alpha \to 0$, 因此(A)正确. $\frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \to -1$, 因此(C) 正确.
- $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + 1 \to 1$, 因此(D)正确.
- $\frac{\beta}{\alpha/\beta} = \frac{\beta^2}{\alpha}$ 未必趋于 0, 因此(B)错误, 例如 $\alpha = x^2, \beta = x \to 0$.

- **定理** 设在自变量的同一变化过程中，$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$，且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ 存在，则 $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ 存在且

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

- **证明** $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \lim \frac{\beta_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$
- 该定理被称为等价无穷小代换定理. 由于无穷大时无穷小的倒数，因此也有等价无穷大代换定理.
- 这些结论可以用在 $\frac{0}{0}$ 型，$\frac{\infty}{\infty}$ 型，$0 \cdot \infty$ 型不定式中，注意我们只能对其中的因式做等价代换，不能对相加或相减的项做代换.

- 如果 $\alpha \to A \neq 0$, β 是无穷小, 则 $\lim \frac{\alpha\beta}{A\beta} = \lim \frac{\alpha}{A} = 1$, $\alpha\beta \sim A\beta$.
- 若 $\beta = o(\alpha)$, 则 $\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \to 1$, 因此 $\alpha + \beta = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \sim \alpha$, 即两个阶不同的无穷小之和等价于其中阶较小的那个.
- 定义 我们称与 α^r 同阶的无穷小为 α 的 k 阶无穷小, $r > 0$.
- 如果两个无穷小 α, β 均有阶, 则 α 是 β 的高阶/低阶/同阶指的就是相应的阶的比较.
- 注记 并不是所有的无穷小都有阶, 例如 $\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$ 是 $x \to 0^+$ 时的无穷小, 但它不与任意 x^r 同阶.

- 例 $x+x^2=x(1+x)\sim x$ 为 $x\to 0$ 的 1 阶无穷小.
- 例 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim x^{\frac{1}{8}}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{\sqrt{x}+1}}\sim x^{\frac{1}{8}}$ 为 $x\to 0^+$ 的 $\frac{1}{8}$ 阶无穷小.
- 也可以这么看, $x+\sqrt{x}\sim\sqrt{x}, x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\sim x^{\frac{1}{4}}$.
- 例 $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\sim x$ 为 $x\to 0$ 的 1 阶无穷小.
- 例 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$.
- 解 该极限为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式. 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}$. 由于 $\frac{1}{x}$ 是无穷小, $\sin x, \cos x$ 有界, 因此 $\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}$ 是无穷小, 从而原式$=\frac{1}{1}=1$.

2.5 极限的存在准则

- 本节中我们将要介绍极限存在的两个准则——夹逼准则和单调有界收敛准则.
- 由此我们可以得到两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ 和 } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

- 并由此得到一些计算极限的方法.
- 夹逼准则 假设三个数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 满足下列条件:
  - 从某一项起有 $a_n\le c_n\le b_n$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.
- 则数列 $\{c_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

- **证明** 设从第 N_0 项起, $a_n \le c_n \le b_n$. 由极限定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2$ 使得

$$\text{当 } n > N_1 \text{ 时, 有 } |a_n - a| < \varepsilon; \text{ 当 } n > N_2 \text{ 时, 有 } |b_n - a| < \varepsilon.$$

- 当 $n > N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$ 时,

$$-\varepsilon < a_n - a \le c_n - a \le b_n - a < \varepsilon,$$

- 即 $|c_n - a| < \varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.
- **夹逼准则(函数版本)** 设在自变量的同一变化过程中, $g(x), f(x), h(x)$ 都有定义, 且满足:
  - $g(x) \le f(x) \le h(x)$;
  - $\lim g(x) = \lim h(x) = A$.
- 则 $\lim f(x) = A$.

- 例 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\right)$.
- 分析 注意到这个求和无法直接计算，我们将其进行放缩，使其变得可计算. 估计时，我们需要保留分子分母的最高次项，这样放缩可以保证上下界的极限相等.
- 解 由于 $\frac{1}{n^3+n}\le\frac{1}{n^3+i}\le\frac{1}{n^3}, i=1,2,\ldots,n$，所以

$$\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\ge\frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)},$$

$$\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\le\frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$，因此由夹逼准则可知原极限为 $\frac{1}{3}$.

- 例 设 $f(x)$ 满足 $|f(x)| \le x^2$. 证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
- 证明 我们有 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right) = 0$ 和 $-x^2 \le f(x) \le x^2$. 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
- 作为夹逼准则的一个应用，我们来证明定理 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$，即 $\sin x \sim x$.
- 证明 由于 $\dfrac{\sin x}{x}$ 对一切 $x \ne 0$ 有定义，且它是偶函数，因此我们可以将 $x \to 0$ 等价地转化为 $x \to 0^+$，并将 x 限制在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 范围内讨论.
- 由三角函数基本不等式 $\tan x > x > \sin x > 0$ 可知 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.
- 而 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$，因此由夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

- 在极限过程中，我们可以将 $x \to 0$ 换成任何一个函数 $y = f(x) \to 0$. 由于 $x \to 0$ 当且仅当 $\arcsin x \to 0$, 因此

$$\sin(\arcsin x) \sim \arcsin x \quad (\arcsin x \to 0),$$

- 即

$$\arcsin x \sim x \quad (x \to 0).$$

- 例 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$, 即 $\tan x \sim x \ (x \to 0)$. 同理,

$$\arctan x \sim x \quad (x \to 0).$$

- 例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$. 这里我们利用了极限的复合运算性质以及等价无穷小替换.
- 由上述讨论我们得到了一些等价无穷小: 当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim x, \qquad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

- 需要注意第一个重要极限和 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ 的差别. 我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

- 例 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2\sin\dfrac{x-x_0}{2}\cos\dfrac{x+x_0}{2}}{x-x_0}$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\dfrac{x-x_0}{2}}{\dfrac{x-x_0}{2}}\cdot\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}=\cos x_0\,.$$

- 也可以设 $y=x+x_0$，则

$$\sin x-\sin x_0=\sin(y+x_0)-\sin x_0=\sin y\cos x_0+(\cos y-1)\sin x_0\,.$$

- 由于 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$, $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{2}=0$, 因此

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\cos x_0\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}-\sin x_0\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y}=\cos x_0\,.$$

- 注记 当我们把要求极限的函数拆成两项极限之和时,
- 如果最终两项极限都存在,那么这种拆分是合理的.
- 如果最终两项极限有一个存在, 一个不存在, 那么最终极限是不存在的.
- 如果最终两项极限都不存在, 那么这种拆分是不合理的, 此时需要使用其它方法来求极限.

- 例如 $x_0 \neq 0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x-x_0}-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x_0}{x-x_0}=\infty-\infty=0$ 是不对的.

- 例 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x\cdot(1-\cos x)}{(\arcsin 5x)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\cdot\frac{x^2}{2}}{(5x)^3}=\frac{3}{250}$.

- 单调有界收敛准则 单调有界数列一定收敛.
- 这里, 数列 $\{x_n\}$ 单增是指: $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$
- 数列 $\{x_n\}$ 单减是指: $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$
- 推论 如果单增数列 $\{x_n\}$ 有上界 M, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq M$.
- 推论 如果单减数列 $\{x_n\}$ 有下界 M, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq M$.
- 例 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_i < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求该极限.
- 解 容易看出 $x_n \geq 0$ 有下界. 当 $n \geq 2$ 时, $x_{n+1} = \sin x_n \leq x_n$, $\{x_n\}$ 单减. 由单调有界收敛准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.
- 设极限为 A, 在递推公式两边同时取极限可得 $A = \sin A$, $A = 0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

- 例 设 $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, n\in\mathbb{N}_+$. 证明该数列极限存在并求其值.
- 分析 这种递归数列的极限问题一般分为两步:
- 1. 证明 $\{x_n\}$ 是单调有界数列, 如果不能直接证明的话一般需要使用数学归纳法. 然后由单调有界收敛准则可知极限存在.
- 2. 设极限为 A, 代入递推公式中, 解方程求得极限.
- 实际中, 我们可以通过计算数列前几项来判断它是单增还是单减, 并计算(2)中的 A, 它必定是这个单增数列的上界或单减数列的下界. 然后我们归纳证明(1).
- 由于 $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>x_1=\sqrt{2}$, 因此我们猜测 $\{x_n\}$ 单增. 由于 $A=\sqrt{2+A}, A=2$, 因此我们猜测 $x_n\leq 2$.

- 解 我们归纳地证明 $2 \geq x_{n+1} \geq x_n$.
- (1) $n = 1$ 时，由 $2 > x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > x_1 = \sqrt{2}$ 可知成立.
- (2) 假设 $2 > x_k > x_{k-1}$，则

$$x_{k+1} - x_k = \sqrt{2+x_k} - \sqrt{2+x_{k-1}} = \frac{x_k - x_{k-1}}{\sqrt{2+x_k} + \sqrt{2+x_{k-1}}} > 0$$

- 且 $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = 2$.
- 由数学归纳法，$2 > x_{n+1} > x_n$ 对任意 n 成立. 因此 $\{x_n\}$ 单增有界，由单调有界收敛准则可知极限存在.
- 设极限为 A，在递推公式两边同时取极限可得 $A = \sqrt{2+A}, A^2 - A - 2 = 0, A = 2$. 故 $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

- 第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

- 证明 我们先讨论数列情形 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. 设 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 则由几何-算术平均不等式

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1<\left[\frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{n\text{项}}+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1}$$

知该数列单增.

- 由

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} < \left[\frac{\frac{1}{2}+\overbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2n}\right)}^{n\text{项}}}{n+1}\right]^{n+1} = 1$$

知 $a_{2n-1} < a_{2n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$. 从而该数列有界.

- 由单调有界收敛准则可知该数列极限存在, 记 $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

- 对于函数形式，设 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}, n=[x]$. 由

$$f(x)\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n,\qquad f(x)\ge\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{n+1}{n+2}a_{n+1}$$

以及夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=e$.

- 最后，令 $y=-x-1$，则

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y+1}\right)^{-y-1}=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\frac{y+1}{y}\right]$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to+\infty}\frac{y+1}{y}=e\cdot 1=e.$$

- 以 e 为底的对数称为自然对数，记为 $\ln x$，e 被称为自然对数的底.
- $e = 2.718281828459045\cdots$ 是无理数.
- 后续我们会看到 $e = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$.
- 由于 $2^n = (1+1)^n \geq \mathrm{C}_n^1 = n$，因此 $4^n \geq n^2$. 当 $4^n \leq x < 4^{n+1}$ 时，

$$x \geq n^2 > \left(\frac{\ln x}{\ln 4} - 1\right)^2, \qquad 0 \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{\ln 2x \cdot \ln 16}{(\ln x - \ln 4)^2} \leq \frac{(\ln x + \ln 2)\ln 16}{(\ln x - \ln 4)^2}.$$

- 因此由夹逼准则，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = 0, \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$.
- 需要注意第二个重要极限和该极限的差别:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1.$$

- 例 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n-1)/2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n-1)/2}\right)^{\frac{n-1}{2}\times 2}\cdot\frac{n+1}{n-1}=e^2.$
- 例 $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{10}{y}}=\left[\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-10}=e^{-10}.$
- 这种极限被称为 1^∞ 型不定式. 这种极限一般要用到第二重要极限, 我们将会在下一节介绍如何处理该类型不定式.
- 最后我们来证明单调有界收敛准则. 该准则和我们前面遇到的各种命题有一个本质的区别, 前面我们所说的极限的概念和性质以及夹逼准则等定理, 在我们仅考虑有理数范围时仍然成立. 而单调有界收敛准则在有理数范围内是不成立的, 原因是有理数域不是完备的.

- 定义 设 S 是一个集合, $R \subseteq S \times S$. 如果有
  - 自反性: $\forall a \in S, (a, a) \in R$
  - 对称性: $\forall a, b \in S, (a, b) \in R \to (b, a) \in R$
  - 传递性: $\forall a, b, c \in S, (a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R \to (a, c) \in R$
- 则称 R 是 S 上的一个等价关系.
- 定义 $[x] = \{ y \in S \mid (x, y) \in R \}$, 则我们得到一个新的集合 $S/R = \{ [x] \mid x \in S \}$, 称之为 S 关于 R 的商集.
- 例 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. 一张正方形的纸对边粘合得到什么?

- 定义 设 $\{x_n\}$ 是一个有理数数列. 如果对于任意有理数 $\varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $m, n > N$ 时, 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$, 则称它是一个柯西数列.
- 定义 设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是两个有理数数列. 如果对于任意有理数 $\varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - y_n| < \varepsilon$, 则称这两个柯西数列等价.
- 例如 0.3,0.33,0.333,0.333, … 和 0.2, 0.32, 0.332, 0.3332, … 等价.
- 定义实数集合为

$$\mathbb{R} = \frac{\{\text{所有柯西数列}\}}{\{\text{所有柯西数列的等价关系}\}}.$$

- 设 $x=[\{x_n\}], y=[\{y_n\}]$, 定义 $x+y=[\{x_n+y_n\}], x\cdot y=[\{x_n\cdot y_n\}]$.
- 定义 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}, x\mapsto[\{x,x,x,\dots\}]$. 容易看出不同的 x 对应的常值数列不是等价的, 因此 f 是单射, $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$.
- 容易证明, 如果对于 $X>0$, 存在 $m,n>X$ 使得 $x_m\geq 0, x_n\leq 0$, 则 $\{x_n\}$ 和 0 等价. 如果 n 充分大时, $x_n>y_n$, 则我们称 $x>y$. 那么 $x>0\Leftrightarrow -x<0$.

- 定理 实数的柯西序列一定收敛.
- 证明设 $a_n = [\{x_{n,k}\}], \{a_n\}$ 是实数的柯西序列. 那么对于 $\varepsilon = \frac{1}{2^n} > 0$, 存在正整数 N_n 使得 $|a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq N_n$. 按照定义, 存在正整数 M_n 使得 $|x_{n,k} -$

- 定理 单调有界数列一定收敛.
- 证明 我们只考虑单增情形, 单减情形类似.
- 设 $\{x_n\}$ 是单增数列, 且存在 M_0 使得 $\forall n, x_n < M_0$. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在最小的 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $[M_0 - (k+1)\varepsilon, M_0 - k\varepsilon)$ 区间内有该数列的点. 那么 $\forall n, x_n < M = M_0 - k\varepsilon$.
- 设 $x_N > M - \varepsilon$, 则 $\forall m, n > N, |x_m - x_n| < \varepsilon$, 因此 $\{x_n\}$ 是柯西数列, 从而存在极限.
- 最后, 我们来证明实数集是不可数无穷集合.

- **证明** 由于 $\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) : (0,1) \to \mathbb{R}$ 是一一对应，因此 $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$.
- 对于每个数 $x \in (0,1)$，令 $0.x_1x_2\cdots$ 为其十进制展开，其中有限小数

$$0.x_1\cdots x_{n-1}x_n = 0.x_1\cdots x_{n-1}y_n999\cdots, \quad y_n = x_n - 1.$$

- 假设 $(0,1)$ 中只有可数个元素，我们将其排成一列:

$$a_1 = a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots$$

$$a_2 = a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots$$

$$a_3 = a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\ldots$$

$$\vdots$$

- 对于每个 $a_{i,i}$，存在整数 $1 \le b_i \le 9$, $b_i \ne a_{i,i}$. 实数 $0.b_1b_2b_3\cdots$ 不等于这列数中的任意一个，矛盾！因此 $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Z}|$，$\mathbb{R}$ 是不可数无穷集合.

2.6 函数的连续性

- 在客观世界中，很多现象都是连续变化的，例如气温的升降，植物的生长等.
- 那么如何用数学语言来刻画连续呢?
- 直观的理解就是，自变量距离很近时，函数值也不会相差太远.
- **定义** 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.
- 我们可以引入**增量**的概念来理解连续. 记 $\Delta x=x-x_0$，则 $x\to x_0$ 即指 $\Delta x\to 0$.
- 记 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续是指 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

- 和极限一样，连续也有单侧连续的概念：
- 设存在 $\delta > 0$ 使得 $y = f(x)$ 在 $[x_0, x_0 + \delta)$ 上有定义. 如果 $f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处右连续.
- 设存在 $\delta > 0$ 使得 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 上有定义. 如果 $f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续.
- 定理 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续当且仅当 $y = f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续，即 $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$.
- 例 由于 $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$，因此 $\sqrt{x}$ 在 0 处右连续.
- 例 设 $f(x)$ 满足 $|f(x)| \le x^2$. 则由 $-x^2 \le f(x) \le x^2$ 和夹逼准则可知 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$，从而 $f(x)$ 在 0 处连续.

- 定义 如果函数 $y = f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的每一个点都连续，则称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内连续，或称 $y = f(x)$ 是 (a, b) 上的连续函数.
- 如果函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内连续，且在 a 处左连续，在 b 处右连续，则称 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，或称 $y = f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数.
- 类似地，我们可以定义在半开半闭区间上的连续性.
- 从图像上看，连续函数的图像是一条连续不断的曲线.
- 例 由于 $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ 对任意实数 x_0 均成立，因此 $\sin x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数.

- **定理** 设函数 $f_1(x)$ 在 (a,b) 内连续, $f_2(x)$ 在 (b,c) 内连续. 则函数

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & a<x<b \\ f(b), & x=b \\ f_2(x), & b<x<c \end{cases}$$

- 在 (a,c) 内连续当且仅当 $f_1(b^-)=f(b)=f_2(b^+)$.
- **证明** 当 $x_0\in(a,b)$ 时, 存在 $f_1\left(x_0^+\right)=f_1(x_0^-)=f_1(x)$, 从而 $f\left(x_0^+\right)=f(x_0^-)=f(x)$, $f(x)$ 在 x_0 处连续.
- 同理 $f(x)$ 在 $x_0\in(b,c)$ 处连续.
- 当 $x_0=b$ 时, $f(b^-)=f_1(b^-), f(b^+)=f_2(b^+)$. 因此该命题成立.

- 推论 设函数 $f_1(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续, $f_2(x)$ 在 $[b,c)$ 上连续. 则函数

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & a<x<b \\ f_2(x), & b\le x<c \end{cases}$$

- 在 (a,c) 内连续当且仅当 $f_1(b)=f_2(b)$.
- 这两个命题常常用于判断分段函数分点处的连续性.
- 例 $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$. 由于 $f(0^-)=-1, f(0^+)=1$, $f(0)=0$, 因此 $f(x)$ 在 0 处既不左连续又不右连续, 在其它点都连续.
- 例 $f(x)=|x|=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x\ge 0 \end{cases}$. 由于 $(-x)|_{x=0}=x|_{x=0}=0$, 因此 $f(x)$ 处处连续.

- 例 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ 3-x, & x<1 \end{cases}$. 由于 $(x^2+1)|_{x=1}=2=(3-x)|_{x=1}$, 因此 $f(x)$ 处处连续.

- 例 当 a 取何值时, 函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos 2x}{\tan^2 x}, & x<0 \\ a+x, & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

- 解 当

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos 2x}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=2=f(0)=f(0^+)=a,$$

- 因此 $a=2$.

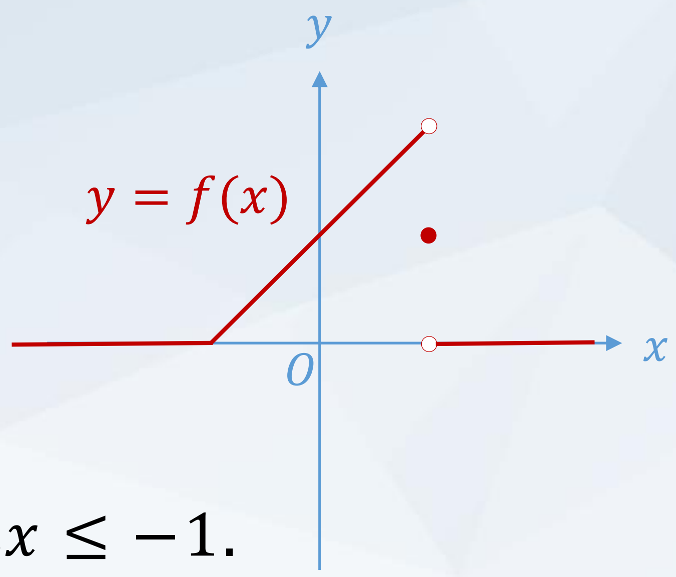
- **例** 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 则 $f(0^+)=f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$, 因此 $f(x)$ 处处连续.
- 从这个例子可以看出, 函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 尽管在 0 处没有定义, 却可以通过补充定义来得到一个在 0 处连续的函数. 不过并非所有的不连续点都可以这样做.
- **定义** 称函数 $f(x)$ 的不连续点为它的间断点, 也称函数在该点间断.
- 有三种情形会产生间断点:
  - (1) $f(x_0)$ 无意义;
  - (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;
  - (3) $f(x_0)$ 有意义且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

- 我们将间断点分为两类.
- 第一类间断点 点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点, 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在.
- (1) 可去间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 不存在.
    - 例如 0 是 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点.
    - 该情形可通过补充或修改函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数为 $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 将其不连续性去除, 这是唯一的一种调整后可使函数连续的间断点.
- (2) 跳跃间断点: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, 此时 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.
    - 例如 0 是 $\operatorname{sgn}(x)$ 的跳跃间断点.

- 第二类间断点 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在，包括
- 无穷间断点：例如 $f(x)=\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$.
- 振荡间断点：例如 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 0 附近在 $-1,1$ 之间无限次振荡.
- 例 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 的间断点和间断点的类型，如果是可去间断点，补充定义使之连续.
- 解 当 $\sin x\neq 0$，即 $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ 时，$f(x)$ 总是连续的，这由极限的四则运算法则得到.
- 当 $x=0$ 时，由 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ 知 0 是可去间断点，补充定义 $f(0)=1$ 可以使之连续.
- 当 $x=k\pi\neq 0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to k\pi} f(x)=\infty$，因此 $k\pi$ 是第二类间断点.

- 例 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的连续性.
- 解 求极限得

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1\\ 1, & x=1\\ 0, & x=-1\\ 0, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}1+x, & |x|<1\\ 1, & x=1\\ 0, & x>1\text{或}x\le -1.\end{cases}$$



- 当 $x=-1$ 时, 由于 $f[(-1)^-]=f[(-1)^+]=f(-1)=0$, 因此 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.
- 当 $x=1$ 时, 由于 $f(1^-)=2, f(1^+)=0$, 因此 1 是跳跃间断点.
- 由此可见, 连续函数数列的极限不一定还连续.

- 例 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$ 的间断点和间断点的类型.
- 解 当 $e^{\frac{x}{x-1}}-1=0$ 时，$\frac{x}{x-1}=0, x=0$. 因此间断点为 0,1.
- 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, 因此 0 是第二类间断点.
- 由于

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{x-1}}=\infty,\ \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{x-1}}=0,$$

- 因此 $f(1^+)=0\neq f(1^-)=-1$, 1 是跳跃间断点.

- **例** 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=($　　$)$

（A）0　　（B）1　　（C）$-\frac{\pi}{2}$　　（D）$\frac{\pi}{2}$

- **解** 容易看出 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的间断点为 $0,1,\pm\frac{\pi}{2}$.
- 由于 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}f(x)=\infty$, 因此 $1,\pm\frac{\pi}{2}$ 是第二类间断点.
- 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$, 因此 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$, 故 0 是第一类跳跃间断点, 选(A).

- 连续函数的运算
- 定理 设函数 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处均连续，则

$$f(x) \pm g(x), \qquad f(x)g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \ (g(x_0) \neq 0)$$

- 均在 x_0 处连续.
- 这由连续的概念和极限的运算可得.
- 例 证明 $\tan x$ 在其定义域内连续.
- 证明 由于 $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，因此 $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 在其定义域内连续. 同理 $\cot x$ 在其定义域内连续.
- 定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续，则它的反函数在 $I_y = f(I_x)$ 上也连续.

- 我们首先来证明 I_y 也是一段区间. 不妨设 $f(x)$ 单调递增. 设 $y_1 = f(x_1) < y < y_2 = f(x_2), x_i \in I_x$, 我们来说明 $y \in I_y$.
- 令 $a_1 = x_1, b_1 = x_2$. 若 $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq y$, 令 $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$; 否则令 $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = b_n$.
- 我们可以归纳地证明 $f(a_{n+1}) \leq y \leq f(b_{n+1})$.
- 现在由 $f(a_n) \leq f(a_{n+1})$ 可知 $a_n \leq a_{n+1} \leq y$, 故 $\{a_n\}$ 是单增有上界数列, 从而有极限. 同理 $\{b_n\}$ 有极限, 且 $0 < b_n - a_n = 2^{1-n}(x_2 - x_1)$ 极限是零, 因此二者极限相同, 记为 x, 则 $f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n)$.
- 而同理 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$, 这迫使 $f(x) = y$. 显然 $x \in I_x$, 故 $y \in I_y$.

- 设 $y_0 = f(x_0)$ 在 I_y 内部. $\forall\varepsilon > 0, \exists\varepsilon_1 \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ s.t. $U(x_0, 2\varepsilon_1) \subseteq I_x$.
- 设 $y_1 = f(x_0 - \varepsilon_1), y_2 = f(x_0 + \varepsilon_1), \delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$.
- $\forall y \in U(y_0, \delta), y_1 < y < y_2$, 从而 $x_0 - \varepsilon_1 < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon_1$. 因此 f^{-1} 在 y_0 处连续.
- 若 I_x 为半开半闭区间或闭区间, 在闭端点处也可类似证明.
- 例 由此可知, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ 在相应区间上都是连续的.
- 定理 如果奇/偶函数 $f(x)$ 在 (a, b), $a > 0$ 上连续, 它在 $(-b, -a)$ 上也连续.
- 定理 如果奇/偶函数 $f(x)$ 在 $[0, a)$ 上连续, 则它在 $(-a, a)$ 上也连续.
- 奇/偶函数的间断点集合总是关于原点对称.

- 例 证明 $f(x)=a^x(a>1)$ 连续.
- 证明 设 x_0 是任一实数. $\forall\varepsilon>0$, 令 $\delta=\log_a(1+\varepsilon a^{-x_0})>0$.
- $\forall x\in(x_0,x_0+\delta), a^x-a^{x_0}=a^{x_0}(a^{x-x_0}-1)<a^{x_0}\left(a^{\delta}-1\right)=\varepsilon, \lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$.
- $\forall x\in(x_0-\delta,x_0), a^{x_0}-a^x=a^{x_0}(1-a^{x-x_0})<a^{x_0}\left(1-a^{-\delta}\right)=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon a^{-x_0}}<\varepsilon$.
- 从而 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$, 即 a^x 在 x_0 处连续.
- $0<a<1$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=\lim\limits_{y\to -x_0}\left(\frac{1}{a}\right)^y=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0}=a^{x_0}$. 因此指数函数都是连续的.
- 由于指数函数是单调的, 从而对数函数在 $(0,+\infty)$ 上连续.
- 由此双曲函数 $\operatorname{sh}x, \operatorname{ch}x, \operatorname{th}x$ 也都是连续的.
- 再根据双曲函数的单调性 ($\operatorname{ch}x$ 需要限制在 $[0,+\infty)$ 上), 可知反双曲函数也是连续的.

- **定理** 设 $u=\varphi(x)$, 若函数 $y=f(u)$ 在点 $u_0=a=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ 处连续, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right]=f(a).$$

- **证明** 这由极限的复合函数性质和连续的定义得到.
- **推论** 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续, 函数 $y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续, 则复合函数 $f[\varphi(x)]$在点 x_0 处连续.
- **例** 证明幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.
- **证明** 这是因为 $y=x^\mu=e^{\mu\ln x}$, 而对数函数和指数函数都是连续的.
- 我们知道, 幂函数的定义域和 μ 的取值有关. 由奇/偶函数的连续的对称性可知在每种情形下, 幂函数都是连续的.

- 结论 一切初等函数在其有定义的区间内都是连续的.
- 结论 如果初等函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- 所以这里我们可以看出, 连续性可以用来计算极限.
- 例 $\lim\limits_{x\to 1}\arccos\frac{2-x}{1+x}$. 由于它是初等函数, 因此

$$\lim_{x\to 1}\arccos\frac{2-x}{1+x}=\left(\arccos\frac{2-x}{1+x}\right)\Bigg|_{x=1}=\frac{\arccos 1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

- 例 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(5-\frac{\sin 2x}{x}\right)$.
- 0 不在它的定义域内，但是 $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\frac{\sin 2x}{x}\right)=5-2=3$，于是

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(5-\frac{\sin 2x}{x}\right)=\ln 3\,.$$

- 例 $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+2)(x-1)}\cdot\frac{3-x-1-x}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{(x+2)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$
$$=\frac{-2}{3\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

- 例 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$

- 例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(1+t)}\quad(t=a^x-1\to 0)$

$$=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\ln a\,.$$

- 例 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$. 令 $t=(1+x)^\alpha-1\to 0$, 则 $\ln(1+t)=\alpha\ln(1+x)$,

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{t}{x}=\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}\to\alpha.$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$

- 由此我们又得到了一些等价无穷小，包括前面的我们有：$x \to 0$ 时，

$$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim x, \qquad 1-\cos x = \frac{1}{2}x^2,$$

$$e^x - 1 \sim x \sim \ln(1+x), \qquad a^x - 1 \sim x\ln a \ \ (a>0, a\neq 1),$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (\alpha \neq 0)$$

- 在运用时，我们可以将等价关系中的 x 以及极限过程中的 x 一起换成任意函数．例如 $\sin\frac{x-1}{x+1} \sim \frac{x-1}{x+1}$ $\left(\frac{x-1}{x+1} \to 0\right)$，此即 $\sin\frac{x-1}{x+1} \sim \frac{x-1}{x+1}$ $(x \to 1)$．

- 例 设 $a_1 = x(\cos\sqrt{x} - 1), a_2 = \sqrt{x}\ln(1 + \sqrt[3]{x}), a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$. 当 $x \to 0^+$ 时, 这些无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　)

  (A) a_1, a_2, a_3　(B) a_2, a_3, a_1　(C) a_2, a_1, a_3　(D) a_3, a_2, a_1

- 当 $x \to 0^+$ 时, $a_1 \sim x \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2$, $a_2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{5}{6}}, a_3 \sim \frac{1}{3}x$, 故选(B).

- 例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x^2)}{(e^{2x}-1)\ln(1-x)}$

- 分析 我们观察发现它是 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 于是可以用等价无穷小替换.

- 解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x^2)}{(e^{2x}-1)\ln(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(2x)(-x)} = -\dfrac{1}{2}$.

- 例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{(2^x-1)\ln(1-x)}$.
- 分析 我们观察发现它是 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 其中分子是两层函数的复合, 我们从外往里逐层使用等价无穷小替换.
- 解 当 $x\to 0$ 时, $\cos x\to 1$.
- 由于 $\ln(1+x)\sim x\ \ (x\to 0)$, 因此 $\ln\cos x\sim \cos x-1\sim -\frac{1}{2}x^2(x\to 0)$.
- 由 $(2^x-1)\sim x\ln 2$, $\ln(1-x)\sim -x$ 可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{(2^x-1)\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{(x\ln 2)\cdot(-x)}=\frac{1}{2\ln 2}.$$

- 例 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$, 则 $a=$________, $b=$________.
- 解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\,(\cos x-b)=0$, 因此

$$\lim_{x\to 0}(e^x-a)=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\,(\cos x-b)}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)}=0,$$

- $a=1$. 于是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}=1, \lim\limits_{x\to 0}(\cos x-b)=1-b=5, b=-4.$

- 例 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$.
- 分析 这是$\infty-\infty$型不定式, 我们用变量替换 $t=\dfrac{1}{n}\to 0$.
- 解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{t}+\sqrt{\dfrac{1}{t}}}-\sqrt{\dfrac{1}{t}}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{t}}-1}{\sqrt{t}}$
- $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{t}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

- **定理** 如果 $\lim u(x)=1, \lim v(x)=\infty$, 则 $\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim[u(x)-1]v(x)}$.
- **证明** 由于 $\ln u(x)\sim u(x)-1$, 因此

$$\lim \ln u(x)\cdot v(x)=\lim[u(x)-1]v(x).$$

- 由于 e^x 是连续函数, 因此

$$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim \ln u(x)\cdot v(x)}=e^{\lim[u(x)-1]v(x)}.$$

- **注** 由此可知, 1^∞ **型不定式**总可以化为 $0\cdot\infty$ 型不定式.
- **例** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda}{n}\cdot n}=e^{\lambda}$.
- **例** $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 5x)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-10x}{x}}=e^{-10}$.
- **例** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{\tan x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\tan x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}}=e^2$.

- 我们来讨论下幂指函数的极限与各自极限的关系. 假设 $u(x) > 0$.

$\lim u$	$\lim v$	$\lim u^v$
$A \geq 0$ (存在)	B (存在)	A^B (存在)
1 (存在)	∞	都有可能 (1^∞ 型不定式)
$A > 1$ (存在)	$+\infty$	$+\infty$
$0 < A < 1$ (存在)	$-\infty$	$+\infty$
$A > 1$ (存在)	$-\infty$	0
$0 < A < 1$ (存在)	$+\infty$	0
0 (存在)	$+\infty$	0
0 (存在)	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$B > 0$ (存在) 或 $+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$B < 0$ (存在) 或 $-\infty$	0
$+\infty$	0 (存在)	都有可能

- 有限闭区间上连续函数的性质
- 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数有许多重要的性质，这些性质在理论和实践中都有重要的作用.
- 我们将要介绍几个常见的性质，这些性质从几何角度非常直观，但严格证明则需要较深的数学理论.
- 定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上(内)有定义. 如果

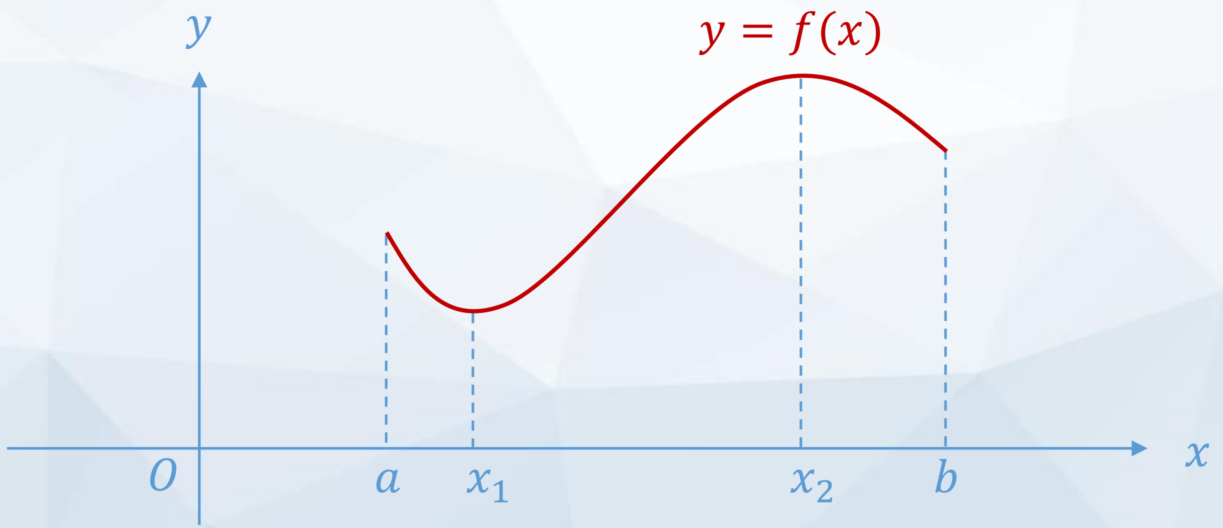
$$\exists x_0\in I \text{ 使得当 } x\in I \text{ 时, 有 } f(x)\le f(x_0) \quad (\text{或有 } f(x)\ge f(x_0)),$$

- 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上(内)有最大值 $f(x_0)$ (或有最小值 $f(x_0)$), 记做 $\max\limits_{x\in I} f(x)$ 或 $\min\limits_{x\in I} f(x)$, 即

$$f(x_0)=\max_{x\in I} f(x) \qquad (\text{或 } f(x_0)=\min_{x\in I} f(x)).$$

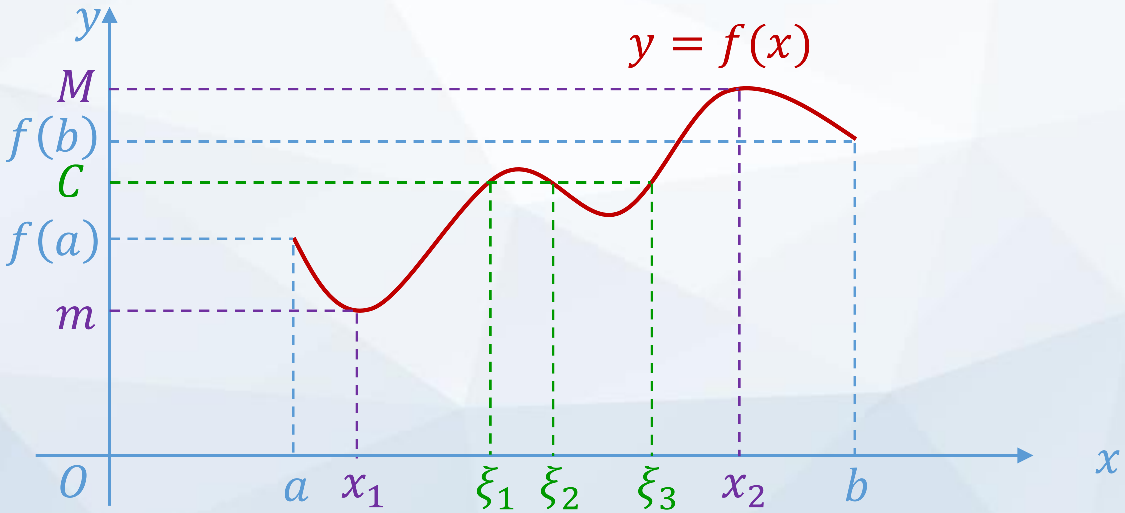
- 注意 $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ 和 $\max\limits_{x\in I} f(x)$ 的不同. $\max\limits_{x\in I} f(x)$ 如果存在, 则必定是某一点的函数值, 但 $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ 有可能并不是某一点的函数值, 即使 $\sup\limits_{x\in I} f(x) \neq +\infty$.
- 如果函数存在最大值或最小值, 则最大值或最小值一定是唯一的, 但最大值点 x_0 或最小值点 x_0 却未必唯一.
- 例 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 处取得最大值 1, 在 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 处取得最小值 -1, 其中 $k \in \mathbb{Z}$.

- 定理(最值定理) 如果函数 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最大值和最小值.
- 例如下图的函数 $f(x)$ 在 x_1 处取得最小值 $f(x_1)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 在 x_2 处取得最大值 $f(x_2)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

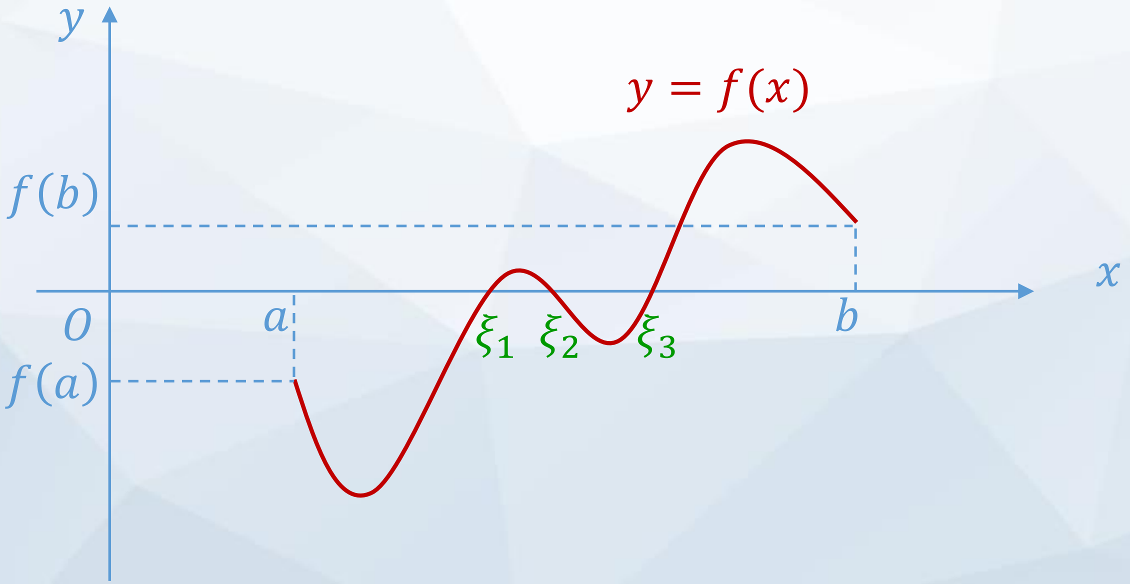


- **推论(有界定理)** 如果函数 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.
- 对于开区间内的连续函数或闭区间上不连续的函数，这些结论不一定成立.
- **例** 函数 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内连续但无界，也无最大值或最小值.
- **例** 函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内连续但无界，无最大值，最小值为 0.
- **例** 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & -1\le x\le 1, x\ne 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上不连续，无界，无最大值或最小值.

- **定理(介值定理)** 如果函数 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a) \neq f(b)$，C 介于 $f(a), f(b)$ 之间，则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = C$.
- **推论** 如果函数 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续，设 $M = f(x_1)$ 为最大值，$m = f(x_2)$ 为最小值，$M > m$，$M > C > m$，则 $\exists \xi$ 介于 x_1, x_2 之间使得 $f(\xi) = C$.
- **推论** 如果函数 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它的值域也是有限闭区间.



- **推论(零点定理)** 如果函数 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.
- 从图像上看, 如果连续的曲线的两个端点分别位于 x 轴的上下侧, 则该曲线与 x 轴至少有一个交点. 如果这个曲线是连续函数 $f(x)$ 的图像, 则这是说 $f(x)=0$ 在开区间 (a,b) 内至少有一个根.
- 更常见的情形是 $f(a)f(b)\le 0$, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=0$.



- 例 证明方程 $x=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有解.
- 证明 令 $f(x)=x-\cos x$, 则它在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 且 $f(0)=-1<0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$. 由零点定理知 $\exists\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $f(\xi)=0$, 即 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有解.
- 由于 $f(x)$ 是单调递增函数, 因此这个零点是唯一的. 我们可以用计算器快速求得这个解的近似值.
- 我们随便从一个值, 例如 $x_0=1$ 开始, 令 $x_{n+1}=\cos x_n$. 设 $x=\cos x$, 则
$$|x_{n+1}-x|=|\cos x_n-\cos x|=\left|-2\sin\frac{x_n+x}{2}\sin\frac{x_n-x}{2}\right|\le 2\cdot\left|\frac{x_n-x}{2}\right|=|x_n-x|.$$
- 由于 $x_0>x$, 归纳可知 $(-1)^n(x_n-x)>0$. 从而 $\{x_{2n}\},\{x_{2n-1}\}$ 是单调有界数列. 设它们的极限是 a,b, 则由递推公式两边同时取极限可知 $a=\cos b, b=\cos a$. 同理, 由和差化积可知, $|a-b|\le 2\left|\sin\frac{a-b}{2}\right|\le|a-b|, a=b, a=\cos a$, 因此 $a=x$.

- 例 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内有解.
- 证明 令 $f(x)=x^3-4x^2+1$, 则它在 $[0,1]$ 上连续, $f(0)=1>0, f(1)=-2<0$. 由零点定理知 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$.
- 对于连续函数 $f(x)$, 我们可以利用二分法来逼近函数的零点.
- 不妨设 $f(x)$ 满足 $f(a)<0, f(b)>0$. 记 $a_0=a, b_0=b$.
- 如果 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le 0$, 令 $a_1=\frac{a+b}{2}, b_1=b$; 如果 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$, 令 $a_1=a, b_1=\frac{a+b}{2}$.
- 我们递归地构造处一串单增有界数列 $\{a_n\}$ 和单减有界数列 $\{b_n\}$, 因此二者极限存在. 由于二者之差 a_n-b_n 趋于零, 因此二者极限相同. 可以证明, 这个极限是 $f(x)$ 的零点.

- 例 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(0)+f(1)=1$. 证明在 $[0,1]$ 上至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi)=\xi$.
- 分析 这种问题一般条件为一个连续函数满足某些性质, 然后证明存在一个点满足一个等式. 我们从结论构造一个辅助函数 F, 将其变成找 F 零点的问题.
- 然后利用条件验证 (1) F 在一个闭区间 $[a,b]$ 上连续; (2) $F(a)F(b)\leq 0$.
- 当等号成立时, 我们还需要单独讨论下.
- 证明 令 $F(x)=f(x)-x$, 则它在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$F(1)=f(1)-1=-f(0)=-F(0).$$

- 如果 $f(0)=0$, 则取 $\xi=0$ 即可.
- 如果 $f(0)\neq 0, F(1)F(0)=-f(0)^2<0$, 从而由零点定理知 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\xi$.

- 例 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续, $f(0)=f(2a)$. 证明存在 $\xi \in [0,a]$ 使得 $f(a+\xi)=f(\xi)$.
- 证明 令 $F(x)=f(a+x)-f(x)$, 则它在 $[0,a]$ 上连续, 且

$$F(a)=f(2a)-f(a)=f(0)-f(a)=-F(0).$$

- 如果 $F(0)=0$, 则取 $\xi=0$ 即可.
- 如果 $F(0)\neq 0, F(a)F(0)=-F(0)^2<0$, 从而由零点定理知 $\exists\xi \in (0,a)$ 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(a+\xi)=f(\xi)$.

- 例 一名游客去黄山二日游. 第一天早上8:00从山脚出发, 经过6个小时到达山顶. 第二天早上8:00从山顶出发沿着第一天的路线下山, 恰好也花了6个小时到达山脚. 证明这个游客两天内在某个相同的时间点经过同一个地点.
- 证明 令 $f(x)$ 为游客第一天自出发经过 x 小时到达的地点距离山脚的距离, $g(x)$ 为游客第二天自出发经过时间 x 小时到达的地点距离山脚的距离. 则山脚和山顶的距离为 $f(6)=g(0)\neq 0$. 另一方面, $f(0)=g(6)=0$.
- 设 $F(x)=f(x)-g(x)$, 则它在 $[0,6]$ 上连续, $F(0)=-g(0), F(6)=f(6)=g(0)$. 因此 $F(0)F(6)=-g(0)^2<0$, 从而由零点定理知存在 $\xi\in(0,6)$ 使得 $F(\xi)=\xi$.
- 因此在8:00经过 ξ 小时后的时间点, 这个游客两天经过同一个地点.
- 想象一下, 另一名游客第二天沿着该游客第一天的路线上山, 且上山进度完全一致, 那么这两名游客自然会在某个时间点相遇.

综合训练

- 例 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.
- 解 我们利用有界函数乘以无穷小仍然是无穷小.
- 由于 $0 \leq \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] < 1$, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, 因此 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1 - x\left[\frac{1}{x}\right]\right) = 0$.

  从而 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.
- 另解 我们利用夹逼准则. 由于 $[x] \leq x < [x] + 1$, 因此 $x - 1 < [x] \leq x$, 从而当 $x > 0$ 时, $x\left(\frac{1}{x} - 1\right) < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq x \cdot \frac{1}{x}$, 即 $1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$.
- 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1 - x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.

- 例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\cos x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.
- 解 注意到这是 1^∞ 型不定式. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\cos x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\cos x-1}{\sin^2 x}}$.
- 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\cos x-1}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 1-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$, 因此原式$= e^{\frac{1}{2}}$.
- 注意红色等式不能直接代入 $\sin x\sim x$.

- **例** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$.
- **解** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)\cancel{=}\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\cancel{=}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}-1=0.$
- **正确的解**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\arctan x-\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}-1=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to-\infty}\arctan x-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1=0.$$

- 因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=0.$
- **注** 遇到 $\arctan x$, $e^{\frac{1}{x}}$, $|x|$, $\sqrt{x}$ 这些函数时，要当心是否要区分左右极限.

- 例 设 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx}{x^2-1}$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2,\lim\limits_{x\to1}f(x)=d$. 求常数 a,b,c,d 的值.
- 解 由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$ 可知 $a=0,b=2$.
- 由 $\lim\limits_{x\to1}\left(2x^2+cx\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(x^2-1\right)\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+cx}{x^2-1}=0\cdot d=0$ 可知 $2+c=0$, 因此 $c=-2$, $d=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-2x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{x+1}=1$.
- $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 型极限, 当 $u(x)\to C\neq0$ 而 $v(x)\to0$ 时, 它趋于无穷. 由此可知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+cx}{x^2-1}$ 存在时其分子极限必定为 0.

- 例 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0 < a_n < 1,\ a_{n+1}(1-a_n) > \frac{1}{4}$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求它的极限.
- 我们利用单调有界收敛准则，由于题目中是关于 a_{n+1} 的下界，因此我们猜测 $a_{n+1} \geq a_n$.
- 解 由均值不等式 $a_n(1-a_n) \leq \frac{1}{4}$, 因此 $a_n(1-a_n) < a_{n+1}(1-a_n), a_n < a_{n+1}$. 从而 $\{a_n\}$ 是单调有界数列，存在极限.
- 设极限为 A, 则由 $a_{n+1}(1-a_n) > \frac{1}{4}$ 两边取极限可得 $A(1-A) \geq \frac{1}{4}, \left(A-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0, A = \frac{1}{2}$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

- 例 方程 $xe^x - \cos x = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有几个实根?
- 我们想要用零点定理, 需要将函数限定在有限闭区间上.
- 解 当 $x > 1$ 时, $xe^x > e$, 因此方程 $xe^x - \cos x = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内没有零点.
- 设 $f(x) = xe^x - \cos x$. 由于 $f(0) = -1 < 0, f(1) = e - \cos 1 > 0$, 因此由零点定理, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有零点.
- 由于 x, e^x 在 $[0, +\infty)$ 上非负且单调递增, 因此 xe^x 单调递增.
- 由于 $\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减, 因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增. 从而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有一个零点.
- 综上所述, 方程 $xe^x - \cos x = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有 1 个实根.

- 例 求所有满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
- 解 令 $x=0$, 则可知 $f(0)=0$.
- 令 $y=kx$, 则 $f[(k+1)x]=f(x)+f(kx), f[(k+1)x]-f(kx)=f(x)$.
- 对于正整数 n, $f(nx)=f(nx)-f(0)=\sum_{k=1}^{n}\left[f(kx)-f\big((k-1)x\big)\right]=nf(x)$.
- 令 $y=-x$, 则 $f(0)=f(x)+f(-x)$, $f(-x)=-f(x)$. 从而对任意整数 n, $f(nx)=nf(x)$.
- 令 $x=\frac{m}{n}$, 则 $f(m)=f\left(n\cdot\frac{m}{n}\right)=nf\left(\frac{m}{n}\right), f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{f(m)}{n}=\frac{mf(1)}{n}$, 即对任意有理数 $x, f(x)=xf(1)$.
- 对于任意实数 x, 存在有理数数列 $x_n\to x$, 于是 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_nf(1)=f(1)x$. 因此 $f(x)=kx$, k 为任一实数.

- 例 求所有满足 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 的连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
- 解 令 $x=y$, 则 $f(2x)=f(x)^2, f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)^2\geq 0$.
- 若存在 x 使得 $f(x)=0$, 则 $f(y)=f(x)\cdot f(y-x)=0$, $f=0$.
- 若 $f\neq 0$, 则对任意 $x, f(x)>0$. 令 $g(x)=\ln f(x)$, 则 $g(x+y)=g(x)+g(y)$ 且 g 连续.
- 因此 $g(x)=kx$, $f(x)=\left(e^k\right)^x$. 令 $a=e^k$, 则 $f(x)=a^x$.
- 因此 $f(x)=0$ 或 a^x, $a>0$.

- **例** 求所有满足 $f(2x)=f(x)$ 的连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
- **解** 显然 $f(2^n x)=f(x)$, n 为任意正整数.
- 对于任意 a, $f\left(\frac{a}{2^n}\right)=f(a)$.
- 由于 $\frac{a}{2^n}\to 0$, 于是 $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{a}{2^n}\right)=f(a)$, 从而 $f=C$ 是常值函数.
- 若只要求 f 在 0 以外有定义, 则存在非常值的 f.
- 设 $g(x)=f(2^x), x>0$, 则 $g(x+1)=g(x)$. 我们可以取 $g(x)=\sin(2\pi x), f(x)=\sin(2\pi\log_2 x)$.

习题课

- 习题2-1
- (A)1. x_n 递减趋向于 0, 极限是 0.
- 2. x_n 奇数项恒为 0, 偶数项 $x_{2n}=\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}$ 递减趋向于 0, 极限是 0.
- 3. x_n 奇数项递减趋向于 -1, 偶数项递减趋向于 1, 极限不存在.
- 4. x_n 在 $(-1,1)$ 之间震荡, 极限不存在.
- 5. $\frac{\pi}{n}$ 递减趋向于 0, x_n 递增趋向于 1, 极限是 1.
- 6. $\frac{1}{n}$ 递减趋向于 0, x_n 递增趋向于 $-\infty$, 极限不存在.

- (B)1.(1) $\left|\frac{2n-1}{3n+2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{7}{3(3n+2)}\leq\frac{1}{n}$. $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\frac{1}{\varepsilon}$. 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{2n-1}{3n+2}-\frac{2}{3}\right|\leq\frac{1}{n}<\frac{1}{N}=\varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\frac{2}{3}$.
- 也可以取 $N=\frac{7}{9\varepsilon}-\frac{2}{3}$.

- (2) $\left|\sin\frac{\pi}{n}\right| \le \left|\frac{\pi}{n}\right| = \frac{\pi}{n}$. $\forall\varepsilon > 0$, 令 $N = \frac{\pi}{\varepsilon}$. 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\sin\frac{\pi}{n} - 0\right| \le \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{N} = \varepsilon.$$

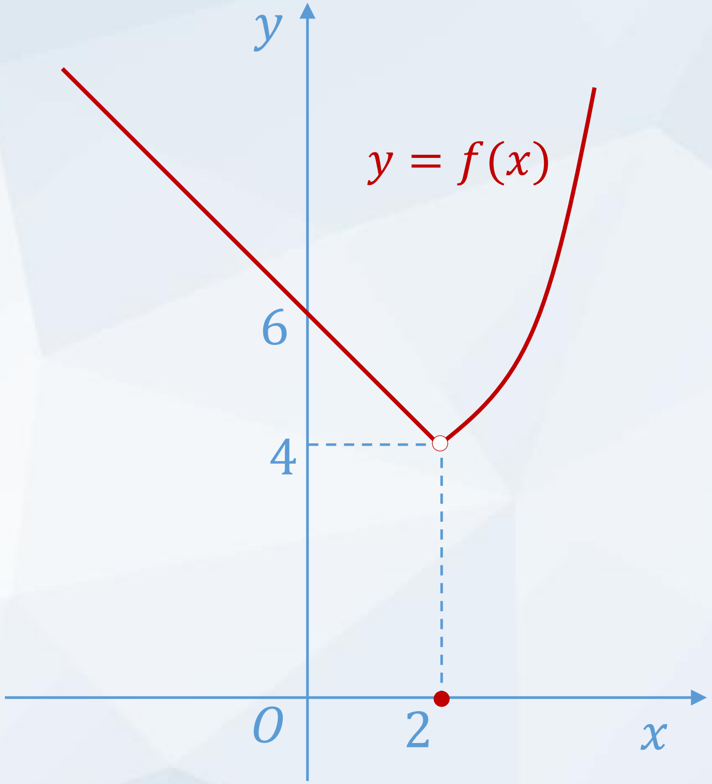
- 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n} = 0$.
- 2. 对于 $\varepsilon = a - b > 0$, $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 于是 $x_n > a - \varepsilon = b$.
- 如果利用2.3节极限的性质, 则更简单.
- 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - a = b - a > 0$. 由极限的保号性可知 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $x_n - a > 0$, 即 $x_n > a$.

- 3. 由于

$$|x_n| - |a| \le |x_n - a|, \qquad |a| - |x_n| \le |x_n - a|,$$

- 因此 $\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a|$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 于是 $\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a| < \varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.
- 反之未必成立, 例如 $x_n = (-1)^n, |x_n| = 1$.
- 这本质上是因为函数 $y = |x|$ 连续.

- 习题2.2
- (A) 1. (1) 见右图.
- (2) $f(2^-)=4, f(2^+)=4.$
- (3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 存在, 为 4.
- 2. 当 $x<0$ 时, $f(x)=-1$. 因此 $f(0^-)=-1$.
- 当 $x>0$ 时, $f(x)=1$. 因此 $f(0^+)=1$.
- 故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.



- (B) 1. (1) $\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=\left|\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right|=|x+2|.$
- $\forall\epsilon>0$, 令 $\delta=\varepsilon$. 当 $0<|x+2|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x+2|<\delta=\varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4.$

- (2) $\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right| \le |x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|.$
- $\forall\epsilon>0$, 令 $\delta=\varepsilon$. 当 $0<|x|<\delta$ 时, 有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right| \le |x| < \delta = \varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$
- 注意它和第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$ 的差异.

- (3) 由 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\varepsilon$ 解得 $x>\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}$ 或 $x<0.$
- 由 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>-\varepsilon$ 解得 $x<\frac{1}{e^{-\varepsilon}-1}$ 或 $x>0.$
- $\forall\varepsilon>0$, 令 $X=\max\left\{\frac{1}{e^{\varepsilon}-1},-\frac{1}{e^{-\varepsilon}-1}\right\}>0.$
- 当 $x>X$ 时, 有 $0<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\varepsilon$. 当 $x<-X$ 时, 有 $-\varepsilon<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<0.$
- 因此当 $|x|>X$ 时, 有 $\left|\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0.$

- (4) 使用定义证明极限的时候, 可以适当缩小自变量的范围.
- 对于数列情形, 可以不妨设 $n > N_0$, 然后在取 N 的时候额外要求 $N \geq N_0$ 即可.
- 对于 $x \to x_0$ 情形, 可以不妨设 $-\delta_0 < x - x_0 < \delta_0$, 然后在取 δ 的时候额外要求 $\delta \geq \delta_0$ 即可.
- 当 $1 < x < 3$ 时, $\left|x^2 - 4\right| = (x+2)|x-2| \leq 5|x-2|$.
- $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\right\}$. 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 有 $1 < x < 3, \left|x^2 -\right.$

- 2. 对于 $\varepsilon = 1 > 0$, $\exists\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.
- 因此 $|f(x)| \le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$, 从而有界.
- 习题2.3
- (A) 1. (1) 正确, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) + g(x)]$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}[f(x) + g(x) - f(x)] = \lim\limits_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] - \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.
- (2) 错误, 例如 $x_0 = 0, f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = -\frac{1}{x}$.
- (3) 错误, 例如 $x_0 = 0, f(x) = 0, g(x) = \frac{1}{x}$.

- 2. (1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^4 - x^3 + 5x + 6\right) = \left(2x^4 - x^3 + 5x + 6\right)\big|_{x=1} = 12.$
- (2) 这是 $\frac{0}{0}$ 型不定式.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+8} = \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{x-2}{x^2-2x+4}$$

$$= \frac{-2-2}{(-2)^2-2\times(-2)+4} = -\frac{1}{3}.$$

- (3) 虽然这是 $\infty-\infty$ 型不定式，但是我们可以将其通分化为其它形式.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{3x+2}{x(x^3+2)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x}{x(x^3+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3}{x^3+2}=\frac{x^2-3}{x^3+2}\Big|_{x=0}=-\frac{3}{2}.$$

- (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}(2-t)(1+3t^2)=2.$
- 也可以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\times\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=2\times 1=2.$
- (B) 否. 例如 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)>0,\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$
- 例如 $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}>0,\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$

- 习题2.4
- (A) 1.(1) 错误. 例如 $f(x) = -\frac{1}{(x-x_0)^2}$.
- (2) 错误. 例如 $f(x) = 1 + |x - x_0|$.
- (3) 错误. 例如 $f(x) = x, g(x) = -x, x \to +\infty$.
- (4) 错误. 例如 $f(x) = 0, \forall g, fg = 0$.
- (5) 错误. 这二者极限为 1, 都不是无穷小.

- 2. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=2.$
- 以后遇到这种有理函数在 $x\to\infty$ 时的极限可以直接写结果.
- (2) $x\to 2$ 时, $x-2\to 0, x^2+4x+1\to 13$, 因此 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x+1}{x-2}=\infty$ 不存在.
- (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2^2}{3^2}+\cdots+\dfrac{2^n}{3^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}=3.$

- (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$.
- 3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-4}{x+1}=-\frac{3}{2}\neq1$, 因此它们不是等价无穷小，但是是同阶无穷小.
- 4.(1) $1=\lim\limits_{x\to0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to0}\frac{ax+x^2}{3x-x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{a+x}{3-x^2}=\frac{a}{3}$, $a=3$.
- (2) $0=\lim\limits_{x\to0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to0}\frac{ax+x^2}{3x-x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{a+x}{3-x^2}=\frac{a}{3}$, $a=0$.
- (B) 1. $|f(x)|=\left|x^3+1\right|\geq|x|^3-1$. 对于 $\forall M>0$, 若 $|x|>X=\sqrt[3]{M+1}$, 则 $|f(x)|\geq|x|^3-1>X^3-1=M$. 因此 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时是无穷大.
- $|x|>11$ 时, $|f(x)|\geq11^3-1=1330>1000$.

- 2. 分析: 设 $x = \frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)M}$, 则 $f(x) = \frac{1}{x} = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi > M, k > \frac{M}{2\pi} - \frac{1}{4}$.
- 解: 对于 $\forall M > 0$, 令 $k = \left[\frac{M}{2\pi}\right] + 1 > \frac{M}{2\pi}, x_M = \frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$, 则
- $f(x_M) = \frac{1}{x_M} = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi > 2k\pi > M$.
- 因此 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上无界.
- 令 $x_k = \frac{1}{k\pi}, k$ 为正整数, 则 $f(x_k) = 0$ 且 $x_k \to 0$. 因此 $f(x)$ 不是 $x \to 0^+$ 时的无穷大.

- 3. 由于 $x \to x_0$ 时, α, β 是无穷小, 从而 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha -$

- 习题2.5
- (A) 1. (1)-(5) 是 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ 或 $0\cdot\infty$ 型不定式. 因此我们总可以用等价无穷小(或等价无穷大)替换.
- (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.
- (2) 由于 $\sin x\sim x$, 因此 $\sin\sin x\sim\sin x\sim x$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$.
- (3) $\lim\limits_{x\to -\pi}\frac{\sin x}{x+\pi}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin(y-\pi)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-\sin y}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1$.

- (4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\frac{5}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\tan 5y = \lim\limits_{y\to 0}\frac{5y}{y} = 5.$
- (5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x - 1)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^3} = -\frac{1}{2}.$
- (6)-(8) 都是 1^∞ 型不定式, 由于在本节还没有学习连续性, 因此我们直接用第二个重要极限.
- (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x/2}\right)^{(-x/2)\cdot(-2)} = e^{-2}.$
- (7) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 3} = e^3.$
- (8) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{y}} = e^{-1}.$

- 2.(1) 由于 $0 < x_n < n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，因此由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
- (2) 2.
- (B) 1. 设 $x_n = n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right)$，则
- $x_n > n \times n \times \frac{1}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n}, x_n < n \times n \times \frac{1}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$.
- 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$，因此由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

- 2. 由 $\sin 2y = 2\sin y\cos y$ 可知 $\cos y = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2y}{\sin y}$. 因此
- $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}\right) = \frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.
- 于是
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\sin x}{x}$.
- 从而原式$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.
- 题目中的 $x \neq 0$ 不需要.

- 习题2.6
- (A) 1.(1) 正确. 因为连续函数的差是连续函数.
- (2) 错误. 例如 f 不连续, $g=-f$ 不连续但 $f+g=0$.
- (3) 错误. 例如 $f=0$.
- (4) 错误. 例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 在 0 处不连续但是 $|f|=1$.
- (5) 错误. 同上例.
- (6) 错误. 例如 $\frac{\sin x}{x}$.

- 2. 由于 $\cos\frac{1}{x}$ 当 $x \neq 0$ 时有界, 因此 $f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1 + x\cos\frac{1}{x}\right) = 1.$
- 由于 $x \to 0^-$ 时, $\frac{1}{x} \to -\infty, e^{\frac{1}{x}} \to 0$, 因此 $f(0^-) = 1.$
- 由于 $f(0^+) = f(0^-) = f(0) = 1$, 因此 f 在 0 处连续.
- 3.(1) $x^2 + 2x - 3 = 0, x = 1$ 或 -3. 间断点为 $1, -3$.
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, 因此 $x = 1$ 是可去间断点, 补充定义 $f(1) = \frac{1}{2}$ 可使之连续.
- $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to -3}\frac{x+1}{x+3} = \infty$, 因此 $x = -3$ 是无穷间断点.

- (2) $x^2-1=0, x=1$ 或 -1. 间断点为 ± 1.
- $x\to 1^+$ 时, $x^2-1\to 0^+, \frac{1}{x^2-1}\to +\infty, \arctan\frac{1}{x^2-1}\to\frac{\pi}{2}$.
- $x\to 1^-$ 时, $x^2-1\to 0^-, \frac{1}{x^2-1}\to -\infty, \arctan\frac{1}{x^2-1}\to -\frac{\pi}{2}$.
- 因此 $x=1$ 是跳跃间断点.
- $x\to (-1)^+$ 时, $x^2-1\to 0^-, \frac{1}{x^2-1}\to -\infty, \arctan\frac{1}{x^2-1}\to -\frac{\pi}{2}$.
- $x\to (-1)^-$ 时, $x^2-1\to 0^+, \frac{1}{x^2-1}\to +\infty, \arctan\frac{1}{x^2-1}\to\frac{\pi}{2}$.
- 因此 $x=-1$ 是跳跃间断点.
- 需要区分正负的最常见的就是 $e^x\ (x\to\infty)$ 和 $\arctan x\ (x\to\infty)$.

- (3) 间断点为 0,1.
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x|}{x}=1$. $x\to 1^{+}$ 时, $\frac{1}{x-1}\to+\infty$, $e^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty$, $f(x)\to+\infty$.
- $x\to 1^{-}$ 时, $\frac{1}{x-1}\to-\infty$, $e^{\frac{1}{x-1}}\to 0$, $f(x)\to 1$.
- 因此 $x=1$ 是无穷间断点.
- $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$. $x\to 0^{+}$ 时, $\frac{|x|}{x}\to 1$, $f(x)\to 1+e^{-1}$.
- $x\to 0^{-}$ 时, $\frac{|x|}{x}\to -1$, $f(x)\to -1+e^{-1}$.
- 因此 $x=0$ 是跳跃间断点.

- (4) $\tan x$ 在 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 处无定义; 在 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 处为 0. 因此间断点为 $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- $x \to k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时 $\tan x \to \infty, f(x) \to 0$, 因此 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 是可去间断点, 补充定义 $f\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ 可使之连续.
- $x \to k\pi \neq 0$ 时 $\tan x \to 0, f(x) \to \infty$, 因此 $x = k\pi, k \neq 0$ 是无穷间断点.
- $x \to 0$ 时 $f(x) \to 1$, 因此 $x = 0$ 是可去间断点, 补充定义 $f(0) = 1$ 可使之连续.
- 4.(1) $1 + 2\sin 2x$ 在 $\frac{\pi}{3}$ 处连续, 取值为 $1 + 2\sin\frac{2\pi}{3} = 1 + \sqrt{3}$.
- 由于 $\ln x$ 在其定义域连续, 因此该极限为 $\ln(1 + \sqrt{3})$.

- (2) 令 $y=\frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{y\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{y}-\sqrt{\frac{1}{y}}}-\sqrt{\frac{1}{y}}\right)$$

$$=\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt{1-\sqrt{y}}-1}{\sqrt{y}}$$

$$=\lim_{y\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{y}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

- (3) 原极限 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}+1}$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{4}.$$

- (4) 原极限 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{2+x}-1\right)2x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2+x}} = e^{2}.$$

- 5. 由于函数 $f(x)=e^x-3x$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=1>0, f(1)=e-3<0$, 因此由零点定理, f 在 $(0,1)$ 内存在实根.
- 6. 设 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $F(0)=f(0)<0, F(1)=f(1)-1>0$, 因此由零点定理, $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\xi$.
- (B) 1. 显然 f 在 $x\neq 0$ 处均连续. 由于 $f(0^+)=f(0)=a$,
- $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-e^{\sin x}}{\arctan\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{\frac{x}{2}}=-2$, 因此 $a=-2$.

- 2. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x+1)x}{x^2+1}} = e^3.$

- (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n+1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n+1}-1\right)n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x-1)n}{n+1}} = e^{x-1}.$

- 3. $9 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}, a = \ln 3.$

- 4. 补充定义 $f(a)=f(a^+), f(b)=f(b^-)$, 则 f 在 $[a,b]$ 内连续, 从而在 $[a,b]$ 上有界, 证毕.
- 5. 设 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$, 则 f 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续且 $f(1)=n-1>0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}-1=-\left(\frac{1}{2}\right)^n<0.$
- 由零点定理, f 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有实根.
- 6. 不妨设 $f(x_k)=\max\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}, f(x_m)=\min\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}$.
- 如果所有 $f(x_i)$ 均相等, 则取 $\xi=x_1$ 即可.
- 如果 $f(x_i)$ 不全相等, 则 $k\neq m, f(x_k)>\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]>f(x_m)$.
- 由介值定理, 存在 ξ 介于 x_k, x_m 之间, 满足 $f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]$.

- 总复习题二
- 1.(1) ① 必要, 充分. ② 必要, 充分. ③ 充分必要 (充要)
- (2) 1. 它的奇子数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \to 1$, 偶子数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$.
- (3) 由于 $1-\cos xf(x) \sim \frac{1}{2}\left(xf(x)\right)^2, \left(e^{x^2}-1\right)f(x) \sim x^2 f(x)$, 因此
- $1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}$, $f(0)=2$.
- 2.(1) 有限项不影响极限, 因此 AB 错误.
- $a_n c_n$ 是 $0\cdot\infty$ 型不定式, 极限可能存在, 例如 $a_n=\frac{1}{n}, c_n=n$.
- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 存在, 矛盾. 因此选 D.

- (2) $f(x)=(e^{x\ln 2}-1)+(e^{x\ln 3}-1)\sim x\ln 2+x\ln 3=x\ln 6$ 和 x 同阶不等价，因此选D.
- (3) $\ln^{\alpha}(1+2x)\sim(2x)^{\alpha}=o(x),\ \alpha>1.$
- $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=2^{-\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{2}{\alpha}}=o(x),\frac{2}{\alpha}>1,\alpha<2.$ 因此选B.
- (4) $1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$, 因此 $f(0^+)=\frac{1}{2a}=f(0^-)=b,ab=\frac{1}{2}$, 选A.
- 3. 设 $\forall n,|x_n|<M$. 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N,|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$. 因此 $|x_ny_n|<\varepsilon$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0.$
- 4. 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N,|y_n-x_n|<\varepsilon.$
- 由于 $x_n\le a\le y_n$, 因此 $0\le a-x_n\le y_n-x_n<\varepsilon,0\le y_n-a\le y_n-x_n<\varepsilon$, 从而 $|x_n-a|<\varepsilon,|y_n-a|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a.$

- 5.(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{e^x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}} = e.$

- (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\ln(1+2x^3)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\dfrac{1}{2x^3}$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot(\cos x-1)}{x^3}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{8}.$$

- (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x - x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(e^{-x}-1)(1+\cos x)}$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{(e^{-x}-1)(1+\cos x)}\right]-\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(e^{-x}-1)(1+\cos x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{(-x)\cdot 2}-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(-x)\cdot 2}=-\frac{3}{2}.$$

- (4) 由于 $\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1=\dfrac{x^2}{x^2+(b-a)x-ab}-1=\dfrac{(a-b)x+ab}{x^2+(b-a)x-ab}$,
- 因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]}$
- $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x[(a-b)x+ab]}{x^2+(b-a)x-ab}}=e^{a-b}$.
- 6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$. 首先显然要区分 $x\to 0^{\pm}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{2}{x}}+1}\right)e^{-\frac{1}{x}}=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=1,$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=2,\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{-x}=-1,$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$ 因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$

- 7. 由于该极限是 1^∞ 型不定式，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$ 等价于

$$1 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)\frac{1}{\sin kx} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\tan x}{(1+\tan x)\sin kx} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{kx} = -\frac{2}{k}.$$

- 因此 $k=-2$.
- 8. $0 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^2+y+1}-a-by}{y}$. 于是

$$\lim_{y\to 0}\left(\sqrt{y^2+y+1}-a-by\right) = \left(\lim_{y\to 0}y\right)\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^2+y+1}-a-by}{y}\right) = 0,$$

- $a=1$.

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^2+y+1}-1-by}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{y^2+y+1-(1+by)^2}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2+y+1}+1+by} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\left(1-b^2\right)y^2+(1-2b)y}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2+y+1}+1+by} \\
&= \frac{1-2b}{2}.
\end{aligned}
$$

- 因此 $b=\frac{1}{2}$.
- 一般地，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ux+v}-x-\frac{u}{2}\right)=0$.

- 9. 这种一般都是用夹逼准则.
- (1) 由 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$ 可知

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right) \le n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$ 以及夹逼准则可知

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1.$$

- (2) 由 $\frac{k}{n^2+n+n} \leq \frac{k}{n^2+n+k} \leq \frac{k}{n^2+n}$ 可知

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2+2n} = \frac{n+1}{2n+4} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n+k} \leq \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{2}.$$

- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+4} = \frac{1}{2}$ 以及夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n+k} = \frac{1}{2}$.
- 为什么我们这么估计? 因为分母中 n^2 是主要项, k 相比它都很小, 所以把 k 放缩掉. 但是分子中的 k 本身就是主要项, 不可放缩掉.

- 10. 容易看出当 $x_n > 0$ 时 $x_{n+1} > 0$. 由于 $x_1 = a > 0$, 因此所有的 $x_n > 0$, 从而 $x_{n+1} \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a} = \sqrt{a}$.
- 于是 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right) = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0, \forall n \geq 2$.
- 因此 $x_2, x_3, \ldots$ 是有界单减数列, 从而极限存在.
- 设极限为 A. 在递推公式两边同时取极限可得 $A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right), A^2 = a$.
- 由于 $x_{n+1} \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 1$, 因此 $A \geq \sqrt{a}$, 从而 $A = \sqrt{a}$.

- 11. $e^{\sin x} - e^{\tan x} = \left(e^{\sin x - \tan x} - 1\right)e^{\tan x} \sim e^{\sin x - \tan x} - 1.$
- 由于 $e^x - 1 \sim x$, 故

$$\mathrm{e}^{\sin x - \tan x} - 1 \sim \sin x - \tan x = (\cos x - 1)\tan x$$

$$\sim -\frac{1}{2}x^2 \cdot x = -\frac{1}{2}x^3.$$

- 因此 $n = 3$.

- 12. 求极限得
- $f(x)=\begin{cases}-1, & |x|<1;\\ 0, & x=1;\\ -1, & x=-1;\\ x, & |x|>1.\end{cases}=\begin{cases}-1, & x\in[-1,1);\\ 0, & x=1;\\ x, & |x|>1.\end{cases}$
- 当 $x=-1$ 时, 由于 $f\big((-1)^-\big)=f\big((-1)^+\big)=f(-1)=-1$, 因此 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.
- 当 $x=1$ 时, 由于 $f(1^-)=-1, f(1^+)=1$, 因此 1 是跳跃间断点.
- 事实上 $f(x)=x-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 所以课上已经讲过.

- 13. $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$.
- 当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，f 无定义. 由于 $x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^{+}$ 时，$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\to 0^{+}$，$\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\to+\infty$，$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^{+}} f(x)$ 不存在，因此 $\frac{\pi}{4}$ 是无穷间断点.
- 当 $x=\frac{3\pi}{4}$ 时，f 无定义.
- $x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{+}$ 时，$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\to-\infty$，$\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\to 0$，$f(x)\to 1$.
- $x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{-}$ 时，$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\to+\infty$，$\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\to 0$，$f(x)\to 1$.
- 因此 $\frac{3\pi}{4}$ 是可去间断点，补充定义 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=1$ 可使之在该处连续.

- 14. 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.
- 当 $x > 1$ 时, $f(x) - x^3 = ax^2 + bx + c \geq -\left|ax^2 + bx + c\right| \geq -\left|ax^2\right| - \left|bx^2\right| - \left|cx^2\right| = -(|a| + |b| + |c|)x^2$, $f(x) \geq x^2[x - (|a| + |b| + |c|)]$.
- 因此对任意 $\alpha > \max\{1, |a| + |b| + |c|\}$, 有 $f(\alpha) > 0$.
- 当 $x < -1$ 时, $f(x) - x^3 = ax^2 + bx + c \leq \left|ax^2 + bx + c\right| \leq \left|ax^2\right| + \left|bx^2\right| + \left|cx^2\right| = (|a| + |b| + |c|)x^2$, $f(x) \leq x^2[x + (|a| + |b| + |c|)]$.
- 因此对任意 $\beta < \min\{-1, -|a| - |b| - |c|\}$, 有 $f(\beta) < 0$.
- 由于 f 是连续函数, 由介值定理, 存在 $x \in (\beta, \alpha)$ 使得 $f(x) = 0$.
- 另证. 由 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$ 可知存在 $X > 0$ 使得当 $|x| \geq X$ 时, $\left|\frac{f(x)}{x^3} - 1\right| < \frac{1}{2}$, $\frac{f(x)}{x^3} > \frac{1}{2} > 0$. 故 $f(X) > 0$, $f(-X) < 0$.

- 15. 令 $F(x)=(p+q)f(x)-pf(a)-qf(b)$.
- 则 $F(a)=q[f(a)-f(b)], F(b)=-p[f(a)-f(b)]$.
- 如果 $f(a)=f(b)$, 则取 $\xi=a$ 即可.
- 如果 $f(a)\neq f(b), F(a)F(b)=-pq[f(a)-f(b)]^2<0$, 从而由零点定理知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F(\xi)=0, pf(a)+qf(b)=(p+q)f(\xi)$.
- 另证. 如果 $f(a)=f(b)$, 则取 $\xi=a$ 即可.
- 如果 $f(a)\neq f(b)$, 不妨设 $f(a)<f(b)$, 则 $f(a)<\frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}<f(b)$.
- 从而由介值定理知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}$.